法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

Introduction

- 课程名称：数学基础
- 课程内容：数学分析（一元微分、一元积分、多元微分）
  线性代数（线性方程组、矩阵运算、矩阵分解、二次型）
  最优化（使用导数的最优化方法、对偶理论、二次规划）
- 课程目的：提供机器学习课程中的基本数学和优化理论基础，为零基础的同学学习机器学习理论做准备。
- 参考资料：[1] 高等数学（第二版）（上/下册） 李忠、周建莹 编著 北京大学出版社
  [2] 数学分析（第一、二、三册） 伍胜健 编著 北京大学出版社
  [3] 数学分析中的典型问题与方法（第二版） 裴礼文 编著 高等教育出版社

Introduction

- 参考资料： [4] 简明线性代数 丘维声 编著 北京大学出版社
  [5] 最优化理论与方法 袁亚湘、孙文瑜 编著 科学出版社
  [6] Stephen Boyd and Lieven Vandenberghe. Convex optimization. Cambridge university press, 2009.
  [7] BBC 数学的故事http://www.bilibili.com/video/av487963/
  [8] 数学大师 从芝诺到庞加莱 E.T.贝尔著 徐源 译 上海科技教育出版社
  [9] 天才引导的历程 威廉.邓纳姆 著 苗锋 译 中国对外翻译出版公司

- 演示软件： [1] WolframAlpha http://www.wolframalpha.com/
  [2] MATLAB
  [3] Python

Outline

- 第一课 集合、实数集、函数、初等函数
- 第二课 序列极限、无穷小量、无穷大量
- 第三课 函数极限、连续函数
- 第四课 导数、微分
- 第五课 微分中值定理
- 第六课 泰勒公式、函数凹凸性
- 第七课 一元积分、微积分基本定理
- 第八课 多元函数、多元函数极限、微分、复合函数和隐函数的微分、方向导数、梯度
- 第九课 多元函数中值定理、泰勒公式、隐函数存在定理、函数极值

集合

- 集合："一堆东西"放在一起，称为**集合** (set)，通常用大写字母表示，A。
- 元素 ："一堆东西"里面的一个称之为**元素** (element)，通常用小写字母

  表示，a。

  a属于A $a \in A$ a不属于A $a \notin A$
- 描述方式：列举和描述

  列举 $A = \{1,2,3\}$

  描述 $B = \{x：x\text{是有理数}\}$
- 子集：A的每一个元素都在B中，记为 $A \subseteq B$

  相等，记为 $A = B$

  真子集 $A \subseteq B$且$A \neq B$，记为$A \subset B$

  空集 $\emptyset$

集合

- 集合运算

  交：$A \cap B = \{x: x \in A且x \in B\}$

  并：$A \cup B = \{x: x \in A或x \in B\}$

  差：$A \backslash \mathrm{B} = \{x: x \in A且x \notin B]$

- 任意 ∀
- 存在 ∃
- 基数：集合中元素的个数称为集合的基数（又称为势），记为$|A|$。
- 常见集合： 自然数 $\mathbb{N}$、整数$\mathbb{Z}$、有理数$\mathbb{Q}$、实数$\mathbb{R}$，复数$\mathbb{C}$

实数集

- 区间　(a,b)　[a,b]

  (a,b]　[a,b)

- 邻域　$U(a,\varepsilon)$　$U_0(a,\varepsilon)$

- 数轴

实数集上的数和数轴上的点一一对应

实数集

实数集上的数和数轴上的点一一对应

- 那么问题来了

  Q1. 有理数是否布满数轴？

  A1: 并没有

  Q2. 有理数在数轴上以何种状态存在？

  A2：稠密，$\forall (a,b)\cap \mathbb{Q}\neq \emptyset$

  Q3. 似乎实数集好像是“连续”的，那么怎么描述“连续性”？

- 完备性的刻画

  1. 在实数域中，任意一个单调有界序列必然有极限

  2. 确界存在定理

实数集

- 上界：集合$E \subseteq \mathbb{R}$，并且$E \neq \emptyset$，如果存在$M \in \mathbb{R}$，使得对于$\forall x \in E$，有

  $x \leq M$,则称E有上界，并且说M是E的一个上界。
- 下界
- 上确界：设$E \subseteq \mathbb{R}$是一个非空数集，如果$M \in \mathbb{R}$满足

  (1) M是E的一个上界

  (2) 对$\forall \varepsilon > 0$，存在$x' \in E$使得$x' > M - \varepsilon$，则称M为E的上确界，

  记为$M = supE$
- 下确界：$M = infE$
- 确界存在定理

  非空有上界的实数集必然有上确界，非空有下界的实数集必然有下确界。

实数集的基数

- 有理数有多少个？
- 无理数有多少个？
- 实数有多少个？

→ 无穷和无穷是不是一样大？

- 等势：集合A到集合B存在双射，称A与B等势，记为$A \approx B$。特别地，称与自然数集$\mathbb{N}$等势的集合为可列集。
- $\mathbb{Z} \approx \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \approx \mathbb{Q}$
- $(0，1) \approx \mathbb{R}$
- (康托定理)$\mathbb{N} \not\approx \mathbb{R}$

常用不等式

- 三角不等式

$$|x+y| \le |x|+|y|$$

- 伯努利(Bernoulli)不等式

对于任意的$x \ge -1$和任意的正整数n，有

$$(1+x)^n \ge 1+nx$$

- 算数-几何平均值不等式

对于任意n个非负实数$x_1, x_2, \cdots x_n$有

$$\frac{\mathrm{x}_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \ge \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}$$

映射

- 映射：设A、B是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对A中的每个元素a，按法则f，在B中有唯一确定的元素b与之对应，则称f为从A到B的映射，记作

  $$f: A \to B$$

  其中，b称为元素a在映射f下的象，记作：b=f(a); a称为b关于映射f的原象。也称A为原象集，B为象集
- 单射（嵌入映射）
- 满射（到上映射）
- 双射（一一映射）

函数

- **函数是数集到数集的映射**
- 函数： 对于给定的集合$X \subseteq \mathbb{R}$，如果存在一个对应法则f，使得对于X中的每一个数x，在$\mathbb{R}$中存在唯一的数y与之对应，则称对应法则f为从X到$\mathbb{R}$的一个函数，记为

$$\mathrm{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

其中y称为f在x的值，X称为函数f的定义域，数集$\{f(x): x \in X\}$称为函数f的值域，记为$f(X)$; x称为自变量，y称为因变量。

基本初等函数

- 六类基本初等函数：

  常值函数 $\mathrm{y} = \mathrm{C}$

  幂函数 $y = x^{\alpha}, \quad \alpha > 0$

  指数函数 $y = a^{x}, \quad a > 0$

  对数函数 $y = log_{a}^{x}, \quad a > 0, a \neq 1$

  三角函数 $y = sinx,\ y = cosx,\ y = tanx,\ y = cotx,\ y = secx,\ y = cscx$

  反三角函数 $y = arcsinx, y = arccosx,\ y = arctanx,\ y = arccotx$

函数的运算

- 四则运算

$$(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) \pm f_2(x)$$

$$(f_1 f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$$

$$\frac{f_1}{f_2}(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}, f_2(x) \neq 0$$

- 复合运算

$$y = f_2(f_1(x))$$

- 反函数

  如果f是双射，那么f可逆，记为f^{-1}

- 基本初等函数经过有限次四则运算和复合所得到的函数称为初等函数。

几个特殊函数

- 符号函数

$$y = sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

- 高斯(Gauss)取整函数

$$y = [x]$$

- 狄利克雷(Dirichlet)函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

几个特殊函数

- 黎曼(Riemann)函数

$$
y = R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p} & x = \dfrac{q}{p} \in (0,1), p, q \text{为互素正整数} \\ 0 & x \in (0,1) \backslash \mathrm{Q} \\ 1 & x = 0 \ or\ 1 \end{cases}
$$

函数的性质

设$y = f(x)$定义在X上

- 有界性

存在常数M，使得对$\forall x \in X$,都有$f(x) \leq M$,称$f(x)$在X有上界。

存在常数M，使得对$\forall x \in X$,都有$f(x) \geq M$,称$f(x)$在X有下界。

$f(x)$在X上有上界且有下界称$f(x)$在X上有界。

e.g.　$sinx$，　$1/x$

- 单调性

对于任意$x_1, x_2 \in X$,只要$x_1 < x_2$,就有$f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2))$,称$f(x)$在X上单调递增（递减），如果把$\leq (\geq)$换成$< (>)$，则称严格单调递增（递减）

e.g.　sinx，$y = f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 - x & x \in [0,1] \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$

函数的性质

- 周期性

  存在$T>0$，使得对于$\forall x\in X$，有$f(x+T)=f(x)$，称T是周期。

  e.g. $tanx$,

- 奇偶性

  X关于原点对称

  奇函数 $f(x)=-f(-x)$ e.g. $sinx$

  偶函数 $f(x)=f(-x)$ e.g. $cosx$

  Ex. 证明奇函数的反函数也是奇函数

要点回顾

- 集合论基础
  - 定义
  - 运算
- 集合之间的关系
  - 映射
- 特殊的集合——实数集
  - 完备性
  - 实数集不可列
- 特殊的映射——函数
  - 初等函数，特殊函数
  - 函数的运算、性质

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop