法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。
- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

序列

- 序列实际上是从ℕ到ℝ的一个函数

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

数列

- 但是我们也通常把序列看按照一定顺序排列的数

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), \ldots, x_n = f(n), \ldots$$

e.g.

通项

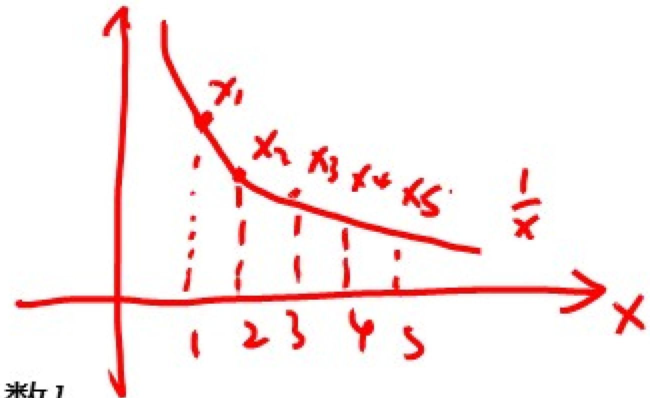
$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: \quad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

描述

$$3, 3.1, 3.14, , 3,141,3,1415, \ldots$$

序列

- $x_n = \frac{1}{n} (n = 1,2,3,\dots)$
- $x_n = \frac{(-1)^n}{n} (n = 1,2,3,\dots)$
- $x_{2n} = \frac{1}{2n}, x_{2n+1} = \frac{1}{2^{2n+1}} (n = 1,2,3,\dots)$



- 当n在趋于无穷的时候，x_n可以任意接近一个数l。
- 那么应该如何描述“趋于无穷”和“任意接近”？

epsilon　　$\forall \exists N$

Cauchy

- 定义(极限)：设$\{x_n\}$是一个序列，如果存在常数l，使得$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,有

$$|x_n - l| < \varepsilon, \forall n > N$$

$\varepsilon - N$ 语言

则称该序列是**收敛**的，并且称l为该序列的极限（或者说序列收敛于l），记为

x_n

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \text{ 或者 } x_n \to l (n \to \infty)$$

$\exists l\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N$
$|x_n - l| < \varepsilon$

如果不存在这样的l，那么称$\{x_n\}$是**发散序列**。

- 如何用$\varepsilon - N$语言描述一个发散序列？

$\{x_n\}\ \forall l\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists n > N$ 使得 $|x_n - l| \geq \varepsilon$
那么 称 $\{x_n\}$ 是发散序列

序列极限的几何意义

$$|x_n - l| < \varepsilon\ ,\ \forall \mathrm{n} > N$$

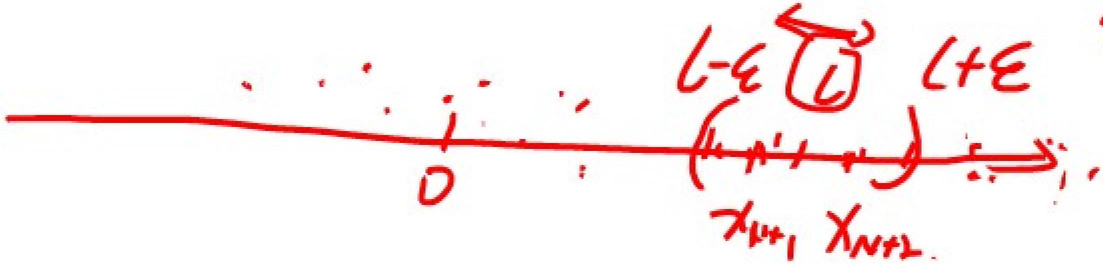
$\forall \varepsilon$

改写为

$$x_n \in U(l,\varepsilon) = (l-\varepsilon, l+\varepsilon), \forall n > N$$

$n \le N$

$n > N$



x_n 无限趋近于 l

- $\forall \varepsilon$,在l的ε邻域$U(l,\varepsilon)$包含了$\{x_n\}$自某项之后的所有项
- $\forall \varepsilon$,在l的ε邻域$U(l,\varepsilon)$之外只有$\{x_n\}$的有限项

无穷项. 所有项

序列极限的几个例子

- 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

$\forall \varepsilon>0 \rightarrow N$

把N写成关于ε的表式

$\forall \varepsilon>0$

$\left|\frac{n}{n+1}-1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon$

$|x_n-1|<\varepsilon$ 反解出N

$\Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}+1$

$N = [\frac{1}{\varepsilon}+1]+1$

当 $n>N$. 有 $\left|\frac{n}{n+1}-1\right| < \varepsilon$ $\forall n > N = [\frac{1}{\varepsilon}+1]+1$ 成立.

故. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0 (|q| < 1)$

$\forall \varepsilon > 0$ $|q^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |q|^n < \varepsilon$

$\Rightarrow n \ln|q| < \ln \varepsilon \Rightarrow n > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}$

$N = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1$

$\therefore$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N = \left[\dfrac{\ln \varepsilon}{\ln|q|}\right] + 1$ 使得当 $n > N$

有 $|x_n - 0| < \varepsilon$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $|q| < 1$

序列极限的几个例子

- 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}=\frac{1}{3}$

$|x_n-1|<\varepsilon$

$\forall n>N$

$\forall \varepsilon>0$

$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}-\frac{1}{3}\right| < F(n) < \varepsilon$

$\left|\frac{3n^2-3n+6-3n^2-2n-4}{3(3n^2+2n+4)}\right| = \left|\frac{5n-2}{3(3n^2+2n+4)}\right| < \frac{5n}{|3(3n^2+2n+4)|}$

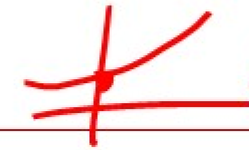
$< \frac{5n}{9n^2} = \frac{5}{9n} < \varepsilon \Rightarrow N=\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]+1$

$\therefore \forall \varepsilon>0 \; \exists N=\left[\frac{5}{9\varepsilon}\right]+1$ 当 $n>N$

$\left|\frac{n^2-n+2}{3n^2+2n+4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$

$\therefore$ 原极限成立. $\square$

序列极限的几个例子



$n \to \infty$

$\frac{1}{n} \to 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} \to 1$.

- 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\quad |\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \varepsilon + 1 \Rightarrow \frac{1}{n} \ln a < \ln(\varepsilon + 1)$

$\frac{\ln a}{\ln(\varepsilon+1)} < n$.

$N = \left[\frac{\ln a}{\ln(\varepsilon+1)}\right] + 1$

$\therefore \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \left[\frac{\ln a}{\ln(\varepsilon+1)}\right] + 1 \quad \forall n > N$

$|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon \quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 1)$

□

序列极限的性质

- 唯一性：收敛序列的极限是**唯一的** $\{x_n\}$ $\to a$ $\to b$ $a\neq b$ ×
- 有界性：收敛序列是**有界的** $\{x_n\}$ $\exists M>0.$ st $|x_n|\le M$ $\forall n\in N$
- 保序性：$a_n \to a, b_n \to b(n\to\infty)$，存在$N_0$使得 $a_n \ge b_n$,只要$N>N_0$

则$a\ge b$。

- 四则运算：设$a_n \to a, b_n \to b$ $(n\to\infty)$，则

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}(b\neq 0, b_n\neq 0)$

- 子序列收敛：$a_n \to a$ $(n\to\infty)$，则a_n的任意一个子序列$a_{n_k}\to a(n\to\infty)$
- 单调收敛原理：单调有界的实数列一定有极限

序列极限的性质

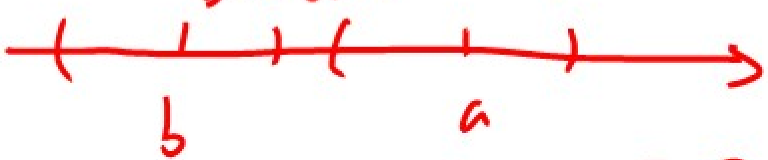
- 唯一性：收敛序列的极限是**唯一的**

反证. $\{x_n\}$ $x_n \to a$ $x_n \to b$ $(n \to \infty)$

不妨设 $a > b$ 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$

$\varepsilon < \frac{a-b}{2}$

$b+\varepsilon < a-\varepsilon$



$\because$ $x_n \to a$ $(n \to \infty)$

$\therefore$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$. 使得当 $n > N_1$ 有 $|x_n - a| < \varepsilon$.

同理 $\exists N_2 \in \mathbb{N}$. 使得当 $n > N_2$ 有 $|x_n - b| < \varepsilon$

$b+\varepsilon < a-\varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 那么 $n > N$ 有

$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |x_n - b| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_n > a-\varepsilon \\ x_n < b+\varepsilon \end{cases} \Rightarrow$ 不存在这样的 x_n

矛盾. 与假设矛盾 $\square$

序列极限的性质

- 有界性：收敛序列是**有界的**

线性 $\{x_n\} \to a \ (n \to \infty)$，那么存在一个 M，使得 $|x_n| \le M, \ \forall n \in \mathbb{N}$

证明：$x_n \to a \ (n \to +\infty)$ 取 $\varepsilon = 1$

$\exists N$ 使得当 $n > N$

$|x_n - a| < 1$ $\quad n > N$

$\Rightarrow \underline{a-1} < x_n < \underline{a+1}$

对 $a_1 \ a_2 \cdots a_N$ ∵ 有限项

∴ $\exists m > 0$ 使得 $|a_i| \le \underline{m} \quad \forall i = 1, 2 \cdots N$

故取 $M = \max\{m, |a-1|, |a+1|\}$

对 $n \in \mathbb{N}$ $|x_n| \le M$，即 $\{x_n\}$ 有界 ∎

N. ε $a\varepsilon$

有限项 有界

max

序列极限的性质

- 保序性：$a_n \to a, b_n \to b(n \to \infty)$，存在$N_0$使得 $a_n \geq b_n$, 只要$N > N_0$

则$a \geq b$。

反证 $a<b$

取 $\varepsilon < \frac{b-a}{2}$ $\exists N_1 > N_0$ 使得 $n>N_1$

$|b_n - b| < \varepsilon$

$\exists N_2 > N_0$ 使得 $n > N_2$ $|a_n - a| < \varepsilon$

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 当 $n>N$ 有

$\begin{cases} |b_n - b| < \varepsilon \\ |a_n - a| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_n > b-\varepsilon \\ a_n < a+\varepsilon \end{cases}$ $b-\varepsilon > a+\varepsilon$

$\therefore$ 与 $a_n \geq b_n$ $n > N_0$ 矛盾

假设不成立 $a \geq b$. 证毕.

序列极限的计算(1)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+4n-100}{4n^2+5n+10}$ $\to \infty$ $\to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{n}-\frac{100}{n^2}}{4+\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}}$$

(上下同除 n^2)

$\frac{4}{n}$ $\frac{5}{n}$ $\to 0$

$-\frac{100}{n^2}$ $\frac{10}{n^2}$ $\to 0$ $\}$ $n\to\infty$

$$=\frac{3}{4}$$

序列极限的计算(1)

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} 1+q+q^2+\cdots+q^n(|q|<1)$

a_1 为首项，q 为公比的等比数列

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q}\underline{(1-q^n)}$$

$$\frac{a_1}{1-q}(1-q^n)$$

$$\begin{cases} |q|^n \to \infty \\ |q|<1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1-q}$$

夹逼收敛原理

设序列$\{x_n\}$ $\{y_n\}$ $\{z_n\}$满足

$$x_n \le z_n \le y_n, \forall n > N_0$$

若$x_n \to \mathrm{a}$, $y_n \to a(n \to \infty)$,则$z_n \to a(n \to \infty)$,

存在性 ✓

值 ✓.

$\forall \varepsilon > 0$

$x_n \to a$

$y_n \to a$

$\therefore \exists N.$ 使得当 $n > N$

$\begin{cases} |x_n - a| < \varepsilon \\ |y_n - a| < \varepsilon \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_n < \varepsilon + a \\ x_n > a - \varepsilon \end{cases}$

又根据 $x_n \le z_n \le y_n$

$\Rightarrow a - \varepsilon < z_n < \varepsilon + a$

$\Rightarrow |z_n - a| < \varepsilon$

$\therefore \lim_{n\to\infty} z_n = a.$ $\Box$

序列极限的计算(2)

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$

$\sqrt[n]{n} > 1$ n 足够大.

$= 1 + h_n \to 0$

$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$

$h_n > 0$

$n = (1+h_n)^n$

$n > n h_n$

$1 > h_n > 0$

$n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k h_n^k$

$= 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots$

$\geq 1 + n h_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$

$n > \frac{n(n-1)}{2} h_n^2$

$\sqrt{\frac{2}{n-1}} > h_n > 0$

$\downarrow 0$

$h_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

序列极限的计算(2)

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n)^{\frac{1}{n}}\ (a_i > 0, i = 1,2,\ldots,m)$ $= a$

$\sqrt[n]{m} \to 1$

$a_i = 1$

证明: $a = \max\{a_1, a_2 \cdots a_m\}$

$$\underbrace{\sqrt[n]{a^n}}_{\downarrow\, a} < \underbrace{\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}}_{\downarrow\, a} < \underbrace{\sqrt[n]{m a^n}}_{\sqrt[n]{m}\,\sqrt[n]{a^n}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{m}\ (\to 1)\quad \sqrt[n]{a^n}\ (\to a)}_{\downarrow\, a}$$

重要极限

伯努利 $\forall x \geq -1$ $\forall n$ (-1,1)

$(1+x)^n \geq 1+nx$

$x_n = (1+\frac{1}{n})^n, y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}, n = 1,2,\ldots$ ，有 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e$

其中 $e = 2.7182\ldots$

① $y_n = (1+\frac{1}{n})x_n > x_n$

② $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$

$= \left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}$

$> \left(1-\frac{1}{n+1}\right) \cdot \frac{n+1}{n}$

$= 1$ $\{x_n\}\uparrow$

③ $\frac{y_n}{y_{n+1}} =$

重要极限

$c = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$, 欧拉常数 $c = 0..577216\ldots$

$(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$

$n\ln(1+\frac{1}{n}) < 1 < (n+1)\ln(1+\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k}) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$\ln(1+\frac{1}{k}) = \ln\frac{k+1}{k}$ $\quad \ln(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} < \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$z_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$

$z_n > \ln(n+1)-\ln n > 0$

$z_n - z_{n+1} = \ln(n+1)-\ln n - \frac{1}{n+1}$

$= \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0$

$\{z_n\}\downarrow$ 有下界 $\to c$

序列极限计算（3）

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n} = e^{-2}$

$(1+\frac{1}{n})^n \to e$

$[\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\to e}]^{-2} \to e^{-2}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n = \frac{1}{e}$

$(1-\frac{1}{n})^n = (\frac{n-1}{n})^n = (\frac{n}{n-1})^{-n}$

$= (1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)-1}$

$= \underbrace{(1+\frac{1}{n-1})^{-(n-1)}}_{e^{-1}} \cdot \underbrace{(1+\frac{1}{n-1})^{-1}}_{1} \to \frac{1}{e}$

序列极限计算（3）

(3) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2} = 0$

$\left[\underbrace{(1-\frac{1}{n})^n}_{\to \frac{1}{e}}\right]^n \to 0$

$n>N$ $\left[(1-\frac{1}{n})\right]^n < |q| < 1$

$\because (1-\frac{1}{n})^n \to \frac{1}{e}$

$\therefore \exists q<1$ 使存 $\exists N$

当 $n>N$，有

$0 < (1-\frac{1}{n})^n < q < 1$

那么当 $n>N$，有

$0 < (1-\frac{1}{n})^{n^2} < q^n$

$0 \to 0$, $(1-\frac{1}{n})^{n^2} \to 0$, $q^n \to 0$

(4) $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n^2})^n = 1$

$\underbrace{(1+\frac{1}{n})^n}_{\to e}$ $\underbrace{(1-\frac{1}{n})^n}_{\to \frac{1}{e}}$

无穷小量

- 作为**序列极限的一种特例**，我们引入无穷小量和无穷大量。

- 定义 (无穷小量):设$\{x_n\}$是一个序列，若$x_n \to 0(n \to \infty)$，则称序列$\{x_n\}$为无穷小量，记为

$$x_n = o(1)(n \to \infty)$$

- 无穷小量的性质：

（1）$\{x_n\}$是无穷小量的充分必要条件是$\{|x_n|\}$是无穷小量。
（2）若$\{x_n\}$是无穷小量，M是一个常数，则$\{Mx_n\}$是无穷小量。
（3）$\lim_{n \to \infty} x_n = l$的充分必要条件是$\{x_n - l\}$是无穷小量。

无穷小量的一个例子

- 证明序列$\{\frac{a^n}{n!}\}(a > 1)$是无穷小量。

无穷大量

- 定义 (无穷大量):设$\{x_n\}$是一个序列，若$\forall M > 0, \exists N,$ 当$n > N,$ 有$|x_n| > M$，则称序列$\{x_n\}$为无穷大量，记为
$$x_n \to \infty (n \to \infty)$$

- 性质： $\{x_n\}$是无穷小量的充分必要条件是$\{\frac{1}{x_n}\}$是无穷大量。

无穷小量和无穷大量的阶

为了刻画趋向于0（无穷）的速度

定义（无穷小量的阶）：设$\{x_n\}\{y_n\}$是当$\mathrm{n} \to \infty$时的无穷小（大）量，且$y_n \neq 0$，当n足够大

（1）若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$,则称$\{x_n\}$是比$\{y_n\}$更高阶的无穷小量（更低阶的无穷大量），记为$x_n = o(y_n)(\mathrm{n} \to \infty)$。

（2）若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \neq 0$,则称$\{x_n\}$是与$\{y_n\}$同阶的无穷小量（同阶的无穷大量。

（3）若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$,则称$\{x_n\}$与$\{y_n\}$是等价无穷小量（等价无穷大量），记为$x_n \sim y_n(\mathrm{n} \to \infty)$。

（4）若$\exists M$和$N > 0$，使得$\forall n > N$有$|x_n| \leq M|y_n|$，则记为$x_n = O(y_n)(\mathrm{n} \to \infty)$。

一组重要的阶的比较关系

$\ln n < n^{a_1} < n^{a_2} < b^n < n! < n^n \ (n \to \infty)(a_2 > a_1 > 0, b > 1)$

注意<表示的是阶的大小关系

① $\frac{\ln n}{n^{a_1}} \to 0 \quad (n \to \infty)$

$\frac{\ln n}{n^{a_1}} = \frac{\ln n}{e^{\ln n \cdot a_1}} = \frac{\ln n}{(e^{a_1})^{\ln n}}$

② $\frac{n^{a_2}}{b^n} \to 0 \quad (n \to \infty)$

$b = 1 + h \quad h > 0$

$[a_2]+1$

假设 a_2 整数

$n \gg a_2$

$\frac{n^{a_2}}{(1+h)^n} = \frac{n^{a_2}}{\sum_{k=0}^{n} C_n^k h^k} < \frac{n^{a_2}}{C_n^{a_2+1} h^{a_2+1}}$

$= \frac{n^{a_2}}{\frac{n(n-1)\cdots(n-a_2)}{a_2!} h^{a_2+1}}$

$= \frac{a_2!}{\underset{\downarrow\,\infty}{n}\underbrace{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{a_2}{n})}_{a_2} h^{a_2+1}} \to 0$

闭区间套定理

设$\{[a_n, b_n]\}$是一列闭区间，并且满足：

（1） $[a_n, b_n] \supseteq [a_{n+1}, b_{n+1}], n = 1,2, \ldots$

（2） $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$

则存在唯一的一点$c \in \mathbb{R}$, 使得$c \in [a_n, b_n], n = 1,2, \ldots$, 即

$$\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

聚点原理

$\{\frac{1}{n}\}$ 0 $U_0(0,\delta)$

0是E的$\{\frac{1}{n}\}$

- 定义（聚点）：设$E \subseteq \mathbb{R}$,若$\mathrm{x}_0 \in \mathbb{R}$ 满足：对$\forall\delta > 0$,有$U_0(x_0,\delta) \cap E \neq \emptyset$则称$\mathrm{x}_0$是$E$的一个聚点。若$\mathrm{x}_0 \in E$但是它不是$E$的聚点，则称$\mathrm{x}_0$是$E$的一个孤立点，即$\exists\delta > 0$，使得$U_0(x_0,\delta) \cap E = \emptyset$。

$\delta < \mathrm{distance}(x_0, \tilde{x})$

- 下列命题等价：

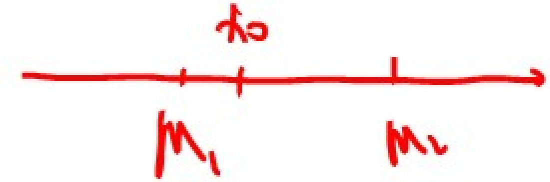
（1）x_0是E的一个聚点

（2）对$\forall\delta > 0$,有$U_0(x_0,\delta)$中有E的无穷多个点

（3）存在E中互异的点组成的序列$\{x_n\}$以x_0为极限点。

$\delta = \frac{1}{n}$

e.g. $E = \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ 0



- 聚点原理：$\mathbb{R}$中任何一个有界无穷子集至少有一个聚点。

波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理

波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理：任何有界序列必然存在收敛子列。

收敛 聚点

Pf.

$\mathbb{R}$ 有界子集 元素

$\{x_n\}$ 有聚点 a

对于 k $U_0(a, \frac{1}{k})$ 中含有 $\{x_n\}$ 中无穷多项

$k=1$ $x_{n_1} = U_0(a, 1) \cap \{x_1, x_2 \cdots\}$

$k=2$ $x_{n_2} = U_0(a, \frac{1}{2}) \cap \{x_{n_1+1}, x_{n_1+2}, \cdots\}$

$n_1 < n_2$ x_{n_k} 子列

$k = \cdots$ 按照上述规则 $\{x_{n_k}\}$ 收敛 a

要点回顾

- 序列极限的计算方法

    定义——$\varepsilon-N$语言

    四则运算，不等式，夹逼定理

- 无穷小量和无穷大量

    无穷小量阶的比较

    一组重要的阶

$\ln n < n^a < a^n < n! < n^n$

- 重要极限c,e

$(1+\frac{1}{n})^n \to e \quad n\to+\infty \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{n} \sim \ln n$

- 闭区间套定理
- 聚点原理
- 波尔扎诺-魏尔斯特拉斯定理

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop