法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

函数极限

$n \to +\infty$
$-\infty$

- 序列极限中自变量n只有一种变化方式$n \to \infty$

- 但是对于函数$y = f(x)$而言，自变量x的变化时连续的，并且有多种可能性

  (1) x从一点a的右侧趋向于a，记为$x \to a + 0$；或者x从一点a的左侧趋向于a，记为$x \to a - 0.$ $+\infty$

  a (2) x从一点a的两侧趋向于a，记为$x \to a.$

  (3) x无限制增大，记为$x \to +\infty$,或者x无限制减小，记为$x \to -\infty.$

  ∞ (4) x的绝对值$|x|$无限制增大，记为$x \to \infty$ $-\infty$ $+\infty$

$|x|$ $x \to \infty$

单侧极限

一个点处的极限.

ε-δ　　ε-N

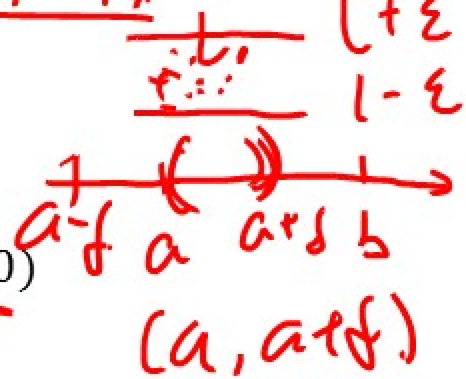
定义　设$y = f(x)$是定义在(a, b)上的一个函数。若存在一个实数l，对于任意给定的$\varepsilon > 0$,无论它多么小，都存在一个$\delta > 0$,使得

$$|f(x) - l| < \varepsilon, \text{只要} 0 < x - a < \delta$$

则我们称当$x \to a + 0$时$f(x)$以l为右极限，记为

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l \quad \text{或者} \quad f(x) \to l \ (x \to a + 0)$$

$N \in N$



类似可以定义左极限。

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta$ 使得

$|f(x) - l| < \varepsilon$ $a-\delta < x < a$

称 $x \to a-0$ $f(x)$ 以l为左极限.

$\lim_{x \to a-0} f(x) = l$　　$f(x) \to l (x \to a-0)$

双侧极限

单侧极限 $(a, a+\delta) \cup (a-\delta, a)$

定义　设$y = f(x)$是定义在一点a的空心邻域

$$U_0(a,r) = (a-r,a) \cup (a,a+r)$$

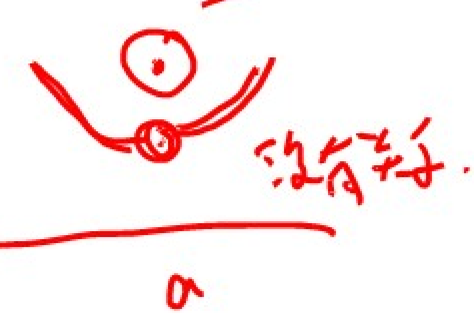
上，若存在一个实数l，对于任意给定的$\varepsilon > 0$,无论它多么小，都存在一个$\delta > 0$,使得

$$|f(x) - l| < \varepsilon,\ \text{只要} 0 < |x-a| < \delta$$

$f(a)$

则我们称当$x \to a$时$f(x)$以l为极限，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \ \ \text{或者}\ \ f(x) \to l\ (x \to a)$$



- 极限存在等价于左右极限存在且相等。
- 极限值唯一性 ε-δ

函数极限的性质

- 四则运算 可以和极限运算交换顺序

设$f(x), g(x)$是定义在a点的一个空心邻域内的函数，若

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1, \lim_{x\to a} g(x) = l_2,$$

则有

可以拆

左

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2 = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right) + \left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = l_1 \cdot l_2$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) = l_1/l_2 \quad (l_2 \neq 0)$$

函数极限的性质

- 复合函数的极限

复合函数求极限交换顺序

设$f(u)$在$U_0(u_0,\delta_1)$有定义，并且$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)$=A；u = $g(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)$有定义，当$x\in U_0(x_0,\delta_0)$时有$g(x)\in U_0(u_0,\delta_1)$且$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$=$u_0$

则有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f\left(\lim_{u\to u_0} u\right) = \lim_{u\to u_0} f(u) = A$$

$$\frac{x^2+x+1-1}{(x^2+x)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+1} = \frac{1}{2}$$

- 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^2+x}$ $=\frac{1}{2}$

函数极限的性质

- 保号性

设$f(x)$，$g(x)$是定义在一点a的空心邻域内的函数，且满足$f(x) \geq g(x)$，若当$x \to a$时$f(x), g(x)$的极限均存在，则有

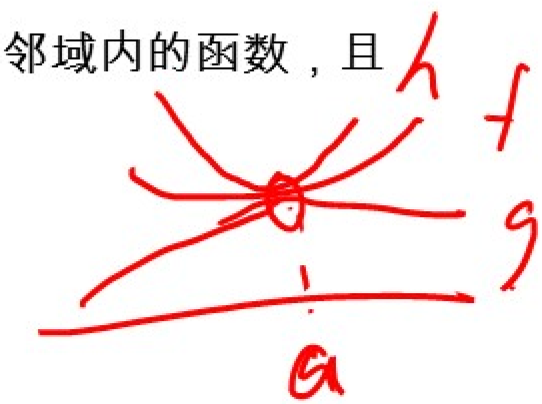
$$\lim_{x \to a} f(x) \geq \lim_{x \to a} g(x)$$

- 夹逼定理

设$f(x)$，$g(x)$以及$h(x)$是定义在一点a的空心邻域内的函数，且满足

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

假如$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$，则$\lim_{x \to a} f(x) = l$。



自变量趋于无穷时的极限

定义　　设$y=f(x)$在$(\mathrm{a},+\infty)$有定义，若存在一个实数l，对于任意给定的$\varepsilon>0$,无论它多么小，都存在一个A$>a$,使得

$$|f(x)-l|<\varepsilon,\text{只要}x>A$$

则我们称当$x\to+\infty$时$f(x)$以l为极限，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \quad \text{或者} \quad f(x)\to l\ (x\to+\infty)$$

$\exists\, l \in \mathbb{R}.\quad \forall \varepsilon>0.$

类似的方式可以定义$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$存在等价于$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$存在且相等。

$(a, +\infty)$

函数极限的计算

- 证明 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2+x-2}=\frac{2}{3}$

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$

多项

$= \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{5}{x^2}}{3+\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}$

$x\to\infty$

$a_n x^n$

$\frac{P(x)}{x^n} = a_n + a_{n-1}x^{-1} + \cdots$

$= \frac{2}{3}$

$= a_n$

$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-5}{3x^2+x-2} = \frac{5}{2}$

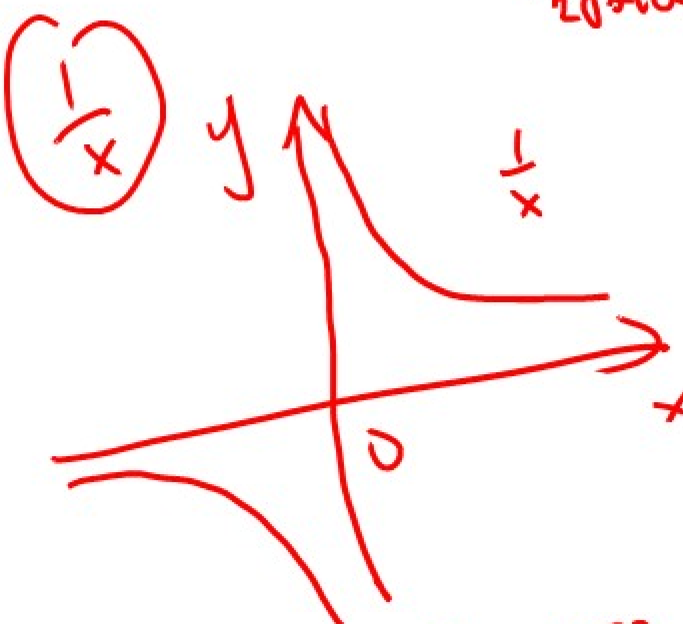
$x\to 0$

a_0

函数极限的计算

- 设$f(x) = \frac{1}{x-1}$,求$f(1-0)$, $f(1+0)$和$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

左极限　右极限　双侧极限



$\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ 不存在

单侧极限

$f(1-0) = -\infty$

$f(1+0) = +\infty$

重要极限

- $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$

$|x| \to +\infty$ $\quad n \to +\infty$ $\quad$ ② $x \to -\infty$

$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

$x = -y \quad y \to +\infty$

$\lim_{y\to+\infty}(1-\frac{1}{y})^{-y}$

$\downarrow$

e

① $x \to +\infty$ $\quad x > 1$

$(1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]} \le (1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^x$

$\le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]+1}$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{[x]+1})^{[x]+1} \le (1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{[x]})^{[x]}$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$e \qquad\qquad e \qquad\qquad e$

重要极限

$$1 \leftarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$

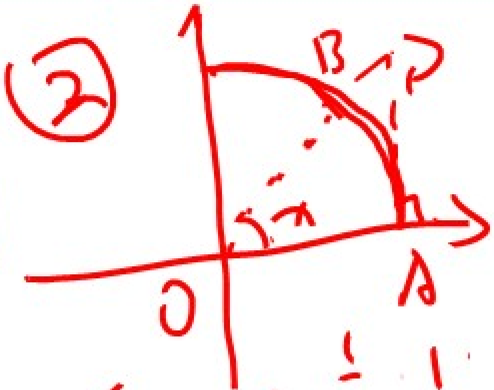
$\sin x \to 0$ 等价
$x \to 0$

$$\boxed{\sin x \sim x \quad (x \to 0)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin(-x)}{-x}$$

②



$S_{\triangle OAD} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot AD$

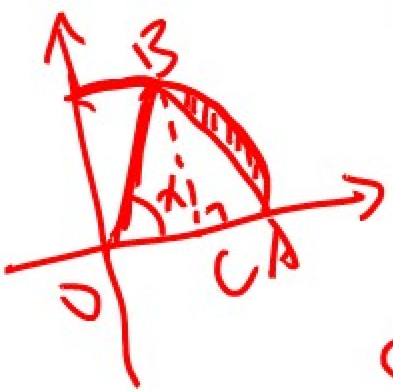
$= \frac{1}{2} \tan x$

$\frac{1}{2} \tan x > \frac{1}{2} x$

$\frac{\sin x}{\cos x} > x$

$$\frac{\sin x}{x} > \cos x$$

① $\sin x < x$ 当 $x > 0$



$S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot BC$

$= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x$

$= \frac{1}{2} \sin x$

$S_{扇形OAB} = \frac{1}{2} x \cdot 1^2 = \frac{1}{2} x$

$\frac{1}{2} x > \frac{1}{2} \sin x$

$x > \sin x$

无穷小量

定义（无穷小/大量） 设$y=f(x)$在$U_0(x_0,\delta_0)$上有定义，若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$则称$f(x)$为$x\to x_0$的一个无穷小量；若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$则称$f(x)$为$x\to x_0$的一个无穷大量。

无穷小量

定义（无穷小/大量的阶） 设$f(x)$，$g(x)$是$x \to x_0$时的无穷小量（无穷大量）且$g(x) \neq 0$当$x \in U_0(x_0, \delta_0)$

（1）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$，则称$f(x)$是比$g(x)$更高阶的无穷小量，记为$f(x) = o(g(x))(x \to x_0)$

（2）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$，则称$f(x)$是与$g(x)$等价的无穷小量，记为$f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$

（3）若$\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$，则称$f(x)$是与$g(x)$同阶的无穷小量

（4）若存在$M > 0, \delta > 0$，使得$\forall x \in U_0(x_0, \delta_0)$，有$f(x) \leq M|g(x)|$,则记为$f(x) = O(g(x))(x \to x_0)$

阶增 g(x)比f(x)快

常用等价关系无穷小量

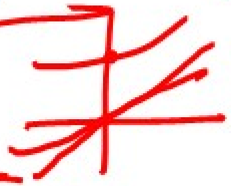
$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x$

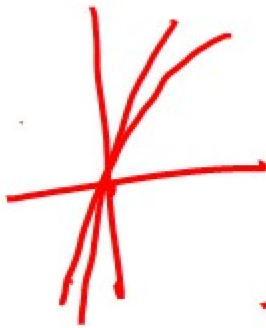
$\sin x - x = o(x)$ $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x} = 0$

- 当$x \to 0$时，下列关系成立

1. $\sin x \sim x;\ \sin x = x + o(x)$
2. $1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2;\ \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
3. $\tan x \sim x;\ \tan x = x + o(x)$
4. $\arcsin x \sim x;\ \arcsin x = x + o(x)$
5. $\ln(1+x) = x;\ \ln(1+x) = x + o(x)$
6. $e^x - 1 \sim x;\ e^x = 1 + x + o(x)$
7. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x;\ (1+x)^\mu = 1 + \mu x + o(x)$



4\. $\frac{\arcsin x}{x}$ $\sin\theta = x$ $\theta \to 0$ $\frac{\theta}{\sin\theta} = 1$



5\. $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

2\. $\frac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}x^2} = \frac{2(\frac{x}{2})^2}{\frac{1}{2}x^2} = 1$

3\. $\frac{\tan x}{x} = \frac{\sin x}{\cos x \cdot x} = 1$

6\. $e^x = y$

7\. $(1+x)^\mu = e^{\ln(1+x)^\mu}$

$x \to 0$ $x < x^2 < x^3 < x^4$

一组重要的阶的比较关系

$\ln n < n^{a_1} < n^{a_2} < b^n < n! < n^n$

$\ln x < x^{a_1} < x^{a_2} < b^x < x! < x^x \ (x \to +\infty)(a_2 > a_1 > 0, b > 0)$

注意<表示的是阶的大小关系

① $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{a_1}} = 0$

x^x

$x!$ $\quad 2.5!$

$\frac{\ln [x]}{([x]+1)^{a_1}} \le \frac{\ln x}{x^{a_1}} \le \frac{\ln([x]+1)}{[x]^{a_1}}$

$\downarrow \quad 0$

0

$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x \ln x}$

$e^x < x! < e^{x \ln x}$

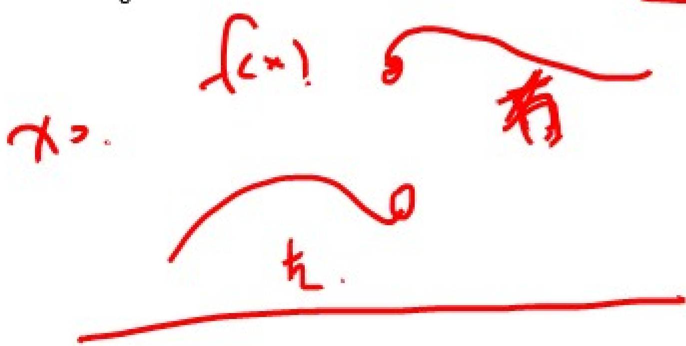
函数的连续性

定义　　设$y=f(x)$在(a,b)有定义，若在一点$x_0\in(a,b)$处

（1）$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在$x_0$处连续

（2）$\lim\limits_{x\to x_{0+0}} f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在$x_0$处右连续

（3）$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$，称函数$f(x)$在$x_0$处左连续



$f(x)$ 在 x_0 连续

$\Leftrightarrow$ 左且右

连续函数的性质

- **四则运算保持连续性**

  设$y = f(x)$，$y = g(x)$在(a, b)在一点$x_0 \in (a, b)$附近有定义，且在x_0处连续,那么f和g在进行四则运算之后仍然连续。

  $f \pm g \quad f \cdot g \quad f/g$

- **函数复合保持连续性**

  设$f: (a, b) \to (c, d)$在x_0处连续，$g: (c, d) \to \mathbb{R}$在$y_0 = f(x_0)$处连续，则复合函数$g \circ f$在x_0处连续。

  $f \quad g \quad f \circ g \quad g \circ f$

连续函数的性质

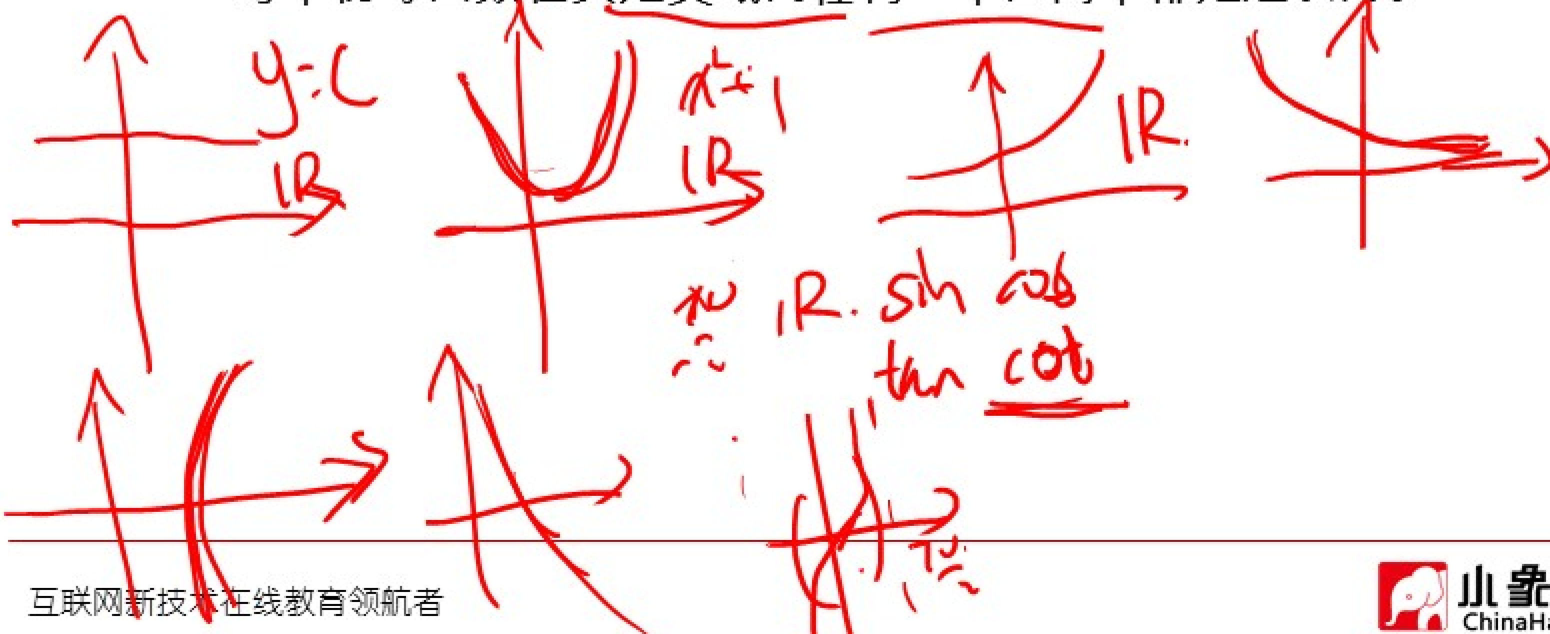
- **反函数连续性**

设$f:(a,b)\to(c,d)$是一一映射并且作为函数是严格单调的，则f是(a,b)上的连续函数，其反函数f^{-1}是(c,d)上的连续函数。

IR

- **初等函数的连续性**

每个初等函数在其定义域内任何一个区间中都是连续的。



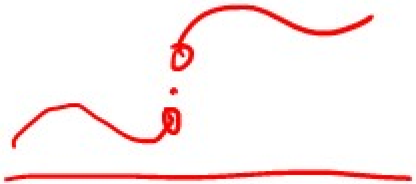
间断点分类

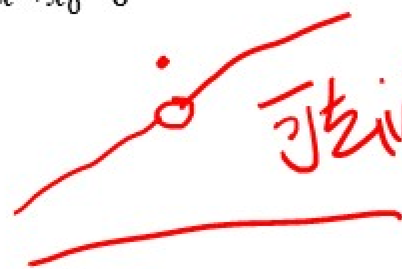
定义　　设x_0是$y=f(x)$的一个间断点，那么

（1）$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$都存在但是不相等，或者他们相等但是不等于函数值$f(x_0)$，此类间断点称为第一类间断点；

（2）$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)\neq f(x_0)$，称$x_0$是可去间断点；

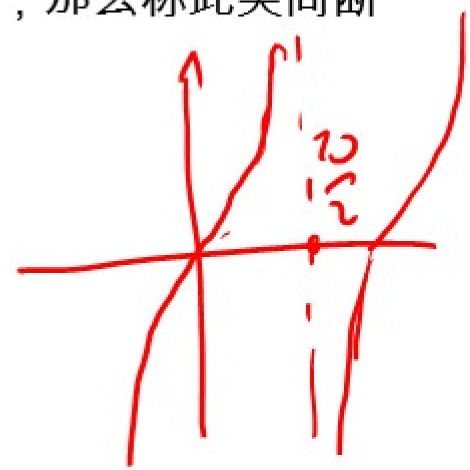
（3）$\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$中至少有一个不存在，那么称此类间断点为第二类间断点。

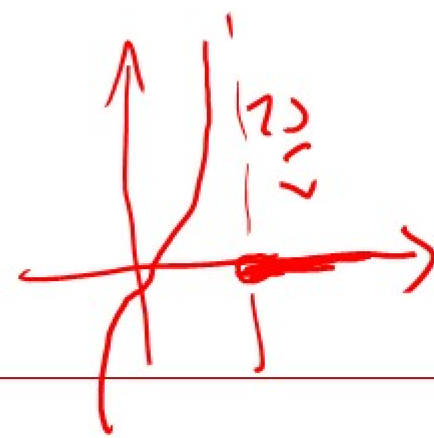




可去间断点

第一类





闭区间上连续函数的性质

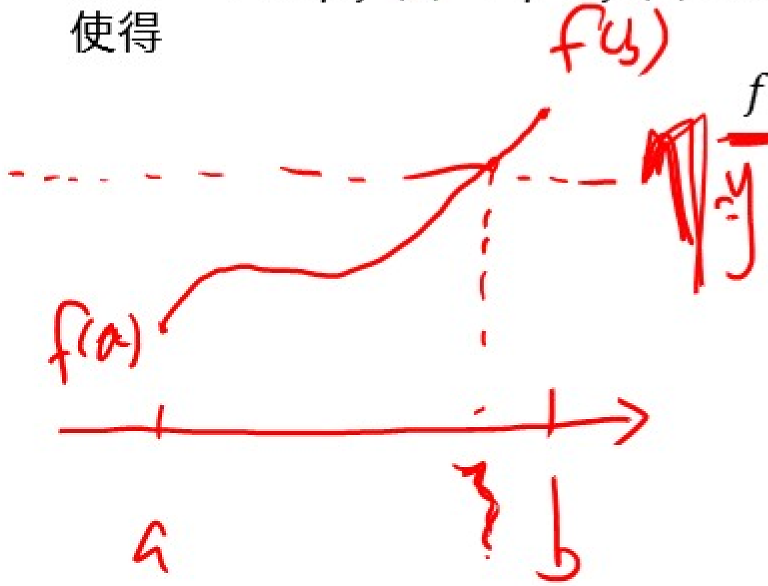
- **介值定理**

闭区间

开区间 X

设f: $[a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数，而且$f(a) \neq f(b)$，则对于任何一个值η: $f(b) < \eta < f(a)$或者$f(a) < \eta < f(b)$，存在一点$\xi \in (a, b)$使得

$$f(\xi) = \eta$$



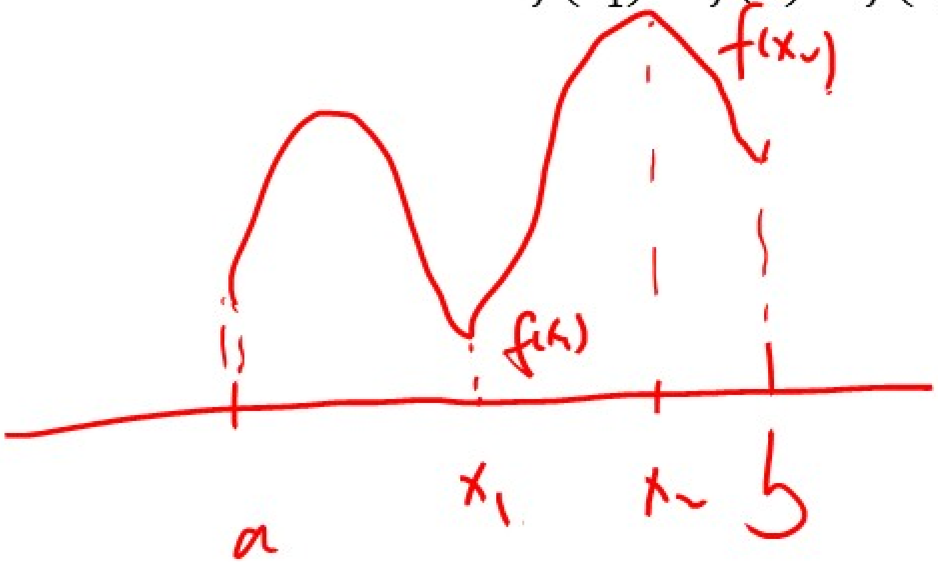
闭区间上连续函数的性质

- **最值定理**

$f(x)$ ∃

设$f: [a, b] \to \mathbb{R}$是$[a, b]$上的连续函数，则它的函数值有最大值和最小值，也就是说存在$x_1 \in [a, b]$及$x_2 \in [a, b]$使得

$$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$$



存在性

开区间 ×

闭区间上连续函数的性质

- **有界性定理**

闭区间上的任何连续函数是有界函数。即设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的连续函数，则存在常数M,N,使得

$$N \le f(x) \le M, \forall x \in [a,b]$$

存在性

e^x

$\mathbb{R}$

连续性定理的一个用途

Ex. 说明实系数多项式 → 奇数次方

$$P(x) = a_0x^5 + a_1x^4 + \cdots + a_4x + a_5$$ $(a_0>0)$

至少有一个实根。

$P(x) = x^5\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_5}{x^5}\right)$

当 $x \to +\infty$　　$P(x) \to +\infty$　　$\exists b.\ P(b) \geq 0$

$x \to -\infty$　　$P(x) \to -\infty$　　$\exists a.\ P(a) < 0$

$P(x) \in C[a,b]$　　$\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $P(\xi) = 0$

ξ 就是 $P(x)$ 的一个实根

要点回顾

- 函数极限
  - 定义 a, ∞; $a+0$ $a-0$ a. $+\infty$ $-\infty$ ∞
  - 性质 $+-\times\div$ 复合
  - 两个重要极限 $\frac{\sin x}{x} \to 1. \ (x\to 0)$. $(1+\frac{1}{x})^x \to e$ $x\to\infty$
- 无穷小量
  - 重要的无穷小量关系 $x \sim \sin x \sim \tan x \sim$
  - 重要的一组阶的比较关系 $\ln x < x^a < b^x < x! < x^x$
- 连续函数
  - 定义 $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$
  - 连续性不变的条件 $+-\times\div$ 复合 反函数 初等函数
- 闭区间上连续函数的性质 ① 介值 ② 最值 ③ 有界性

我们在这里

- 问题答疑：　　http://www.xxwenda.com/
  - 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop