法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

“速度”与“变化率”

$\frac{dv}{dt} = a$

- 最常见的就是对于时间的变化率：

  速度：位移对于时间的变化率 $\frac{s}{t}$

  加速度：速度对于时间的变化率

  电流：电荷对于时间的变化率 $I = \frac{Q}{t}$

  化学反应速率：反应物（产物）浓度对于时间的变化率

$y = x \quad k = 1$

- 也有一些与时间无关的导数例子：

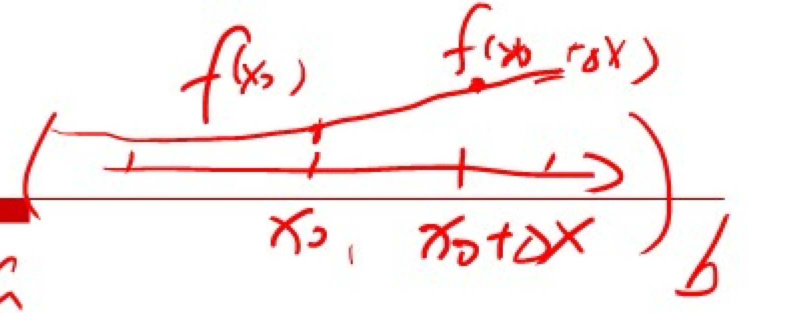
  斜率：纵坐标对于横坐标的变化率

  $F = kx$

  弹簧劲度系数：弹簧受力对于伸缩量的变化率

  边际税率：税收对于收入的变化率

导数



定义　　设$y = f(x)$是定义在(a, b)上的一个函数。对于给定的$x_0 \in (a, b)$，考虑一个增量$\Delta x, \Delta x \neq 0$,且使得$x_0 + \Delta x \in (a, b)$。函数值得变化量$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$称为函数关于$\Delta x$的增量，记为$\Delta y$。若极限

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

$$f(x) \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称这个函数在x_0处可导，并且称这个极限值为函数在x_0处的导数或者微商，记为$f'(x_0)$或$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$

$\frac{df}{dx}|_{x=x_0}$

- 同理可以定义左导数和右导数

$\Delta x \to 0-0$

$\Delta x \to 0+0$

- 点点可导生成导函数

$f'(x)$

导数计算的方法

- 定义法
- 四则运算
- 复合函数求导方法——链式法则
- 反函数求导方法
- 隐函数求导
- 参数函数求导
- 极坐标式函数求导
- 未定式求导——洛必达法则

定义法

- 直接利用导数定义，通过求极限的方法直接求导。

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

- $f(x) = C$, 求$f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} = 0$$

$$f(x) \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = C$$

定义法

- $f(x) = x^{\alpha}$, 求$f'(x)$ $(x>0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^{\alpha-1}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\frac{\Delta x}{x}}$$

$$= \alpha x^{\alpha-1}$$

$\frac{\Delta x}{x} = y$

$$\frac{(1+y)^{\alpha} - 1}{y} = \alpha$$

$(1+x)^{\mu} - 1 \sim \mu x$

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

定义法

- $f(x) = a^x, (a > 0, -\infty < x < +\infty)$, 求$f'(x)$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$

$= a^x \ln a$

$e^1 = e$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(e^x)' = e^x$

$e^x - 1 = x + o(x) \quad (x \to 0)$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$ $\quad a^x = y \to 1$

$x \ln a = \ln y$

$= \lim\limits_{y \to 1} \frac{y - 1}{\frac{\ln y}{\ln a}}$ $\quad y = t + 1$

$= \ln a \lim\limits_{y \to 1} \frac{y-1}{\ln y}$

$= \ln a \lim\limits_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t+1)}$

$= \ln a$

$\ln(t+1) = t + o(t) \quad t \to 0$

定义法

- $f(x)=log_a x,(0<a\neq 1,0<x<+\infty)$, 求$f'(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a (x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

$$=\log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right)$$

$$=\log_a\left(\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{1}{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}\right)$$

$$\frac{x}{\Delta x}\to\infty$$

$$=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$a=e$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

定义法

- $f(x) = sinx, (-\infty < x < +\infty)$, 求$f'(x)$

$(\sin x)' = \cos x$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x$$

定义法

- $f(x) = cosx\ (-\infty < x < +\infty)$, 求$f'(x)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= -\sin x$$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

函数四则运算的导数

定理　　设函数$f(x)$和$g(x)$都在点x处可导，则下列各式在点x处成立：

（1）$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

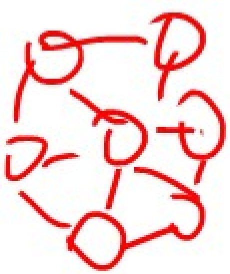
（2）$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$　求导.

（3）$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

- $f(x) = tanx$, 求$f'(x)$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$



$\cos x\cdot\sec x = 1$　　$= \sec^2 x$　　$(\tan x)' = \sec^2 x$

函数四则运算的导数

- $f(x) = cotx$, 求$f'(x)$

$(cotx)' = \left(\frac{cosx}{sinx}\right)' = \frac{-sinx \cdot sinx - cosx \cdot cosx}{sin^2x}$

$= -csc^2x$

$(cot)' = -csc^2x$

反函数的求导法则

定理　　设函数$y = f(x)$ 在(a,b)内严格单调，并且令

$$\alpha = \min\{f(a+0), f(b-0)\}$$
$$\beta = \max\{f(a+0), f(b-0)\}$$

如果$f(x)$ 在(a,b)内可导，并且导数$f'(x) \neq 0$，则它的反函数$x = f^{-1}(y)$ 在(a,b)内可导,并且有：

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

$f'(x)$ $\frac{dy}{dx}$ $f'(t)$ $\frac{dy}{dx}$

$$(f^{-1}(y))' = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{f'(x)}$$

$f(x)$ $f^{-1}(y) = 1$ $\frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1$ $x \to x_0$

$$(f^{-1}(y))'\Big|_{y=y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y-y_0}$$

$$= \lim_{y \to y_0} \frac{x-x_0}{y-y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{y-y_0}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

导数的倒数

反函数的求导法则

- 求$y = arctanx$的导数

$$x = \tan y$$

$$y' = \frac{1}{(\tan y)'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

反函数的求导法则

- 求$y = arcsinx$的导数

$x = \sin y$

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

复合函数的求导法则

a v S

定理　　设函数$y=f(x)$在$U(u_0,\delta_0)$内有定义，函数$u=g(x)$在$U(x_0,\eta_0)$内有定义，且$u_0=g(x_0)$。若$f'(u_0)$ 与$g'(x_0)$都存在，则复合函数$F(x)=f(g(x))$在点x_0可导，并且$F'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0)$。

$$x \xrightarrow{g} u \xrightarrow{f} y$$

$$F = f\circ g \qquad x \to y$$

x_0　u_0　y_0

$$F_x = f'_u \, g'_x$$

链式法则

$$y=f(x)$$

$$f^{-1}(y)=x$$

$$f^{-1}f(x)=x$$

$$1=\frac{df^{-1}(y)}{dy}\cdot\frac{df(x)}{x}$$

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy}=\frac{1}{f'(x)}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

复合函数的求导法则

- 求$y = sinx^2$和$y = sin^2x$的导数

$y = \sin(x^2)$

$t = x^2$　　$x \xrightarrow{x^2} t \xrightarrow{\sin t} y$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \cos t \cdot 2x$

$= 2x \cdot \cos x^2$

$y' = 2x \cos x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$\sin^2 x$

$x \to \sin x \to (\sin x)^2$

$x \xrightarrow{\sin x} t \xrightarrow{t^2} (\sin x)^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

$= 2t \cdot \cos x$

$= 2\sin x \cdot \cos x$ ✓

$= \sin 2x$

$y' = \sin 2x$

隐函数的求导法则

$y: \sin^2 x$

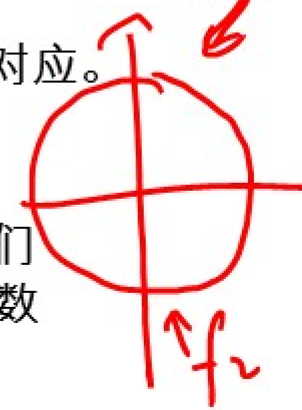
前面我们所遇到的函数都是显式表达，但是在很多问题中，得到的只是变量x和y所满足的方程，如：

$$x^2 + y^2 = 1, \qquad tanx + tany = xy, \qquad lnx + siny = x^2y$$

通常情况下，对于每一个 x ，上述方程可以确定唯一的一个数 y 与之对应。例如：

$$x^2 + y^2 = 1$$

隐含了在$[-1,1]$上的两个函数，$f_1 = \sqrt{1-x^2}, f_2 = -\sqrt{1-x^2}$。虽然我们无法解除函数的显式表达，但是我们任然可以直接将y看成关于x的函数$y(x)$，方程两边都对x求导，就可以得到$y'(x)$。



$y(x)$

$x^2+y^2=1$

$2x+2y\cdot y'=0$

$y'=-\frac{x}{y}$

$\frac{dy}{dx}$

隐函数的求导法则

- 开普勒方程

$$y - x - \varepsilon \sin y = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

求$y'(x)$。

$$y(x) - x - \varepsilon \sin y(x) = 0$$

$$\underline{y'} - 1 - \varepsilon \cos y \cdot \underline{y'} = 0$$

$$-1 = (\varepsilon \cos y + 1) \cdot y'$$

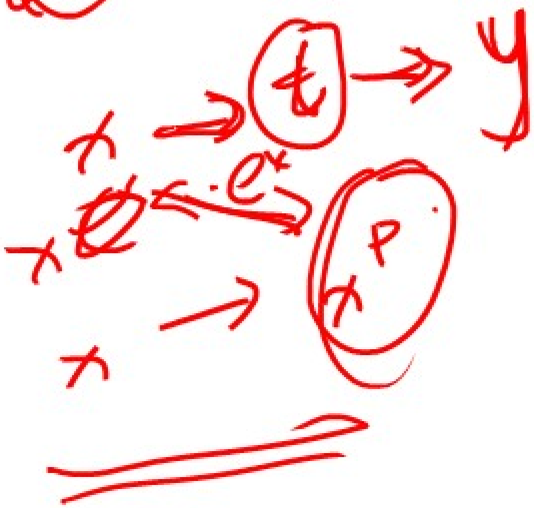
$$y' = \frac{-1}{\varepsilon \cos y + 1}$$

隐函数的求导法则

- 设$y = x^{e^x}\ (x > 0)$求$y'(x)$。

取对数

① 链式法则



②

$$\ln y = \ln x^{e^x}$$

$$\Rightarrow \ln y = e^x \ln x$$

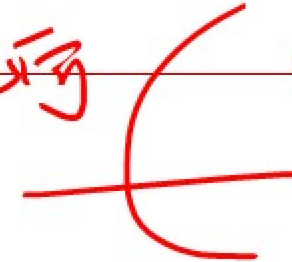
$$\frac{1}{y} y' = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y' = x^{e^x} e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)}$$

参数式函数的求导法则

几何 曲线



参数

函数的方程由参数式给出：

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in (\alpha, \beta)$$

如果函数x(y)和y(t)都在(α, β)内可导，并且$x'(t) \neq 0$,那么在这个条件下，由参数方程可以确定一个函数

$$y = f(x) = y\big(t(x)\big), x \in (a, b)$$

那么由复合函数求导法则，可以得到

$$y'_x = y'(t)t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

① 链式法则

$y(t)$ $x(t)$ $t(x)=t$

$$y'_x = y'_t t'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

纵向

②

$$\frac{dy}{dt} \quad \frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

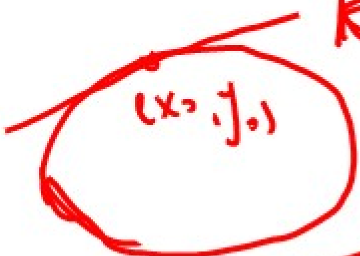
参数式函数的求导法则

- 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,(a,b>0)$上点$(x_0,y_0)$处的切线。

$(x_0,y_0)\to t_0$

k

导数



$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}$$

$t\in[0,2\pi)$

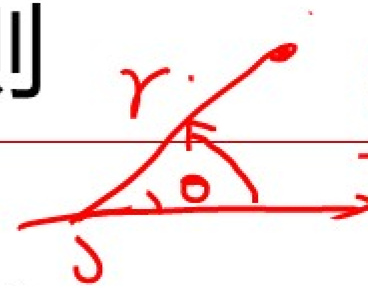
切线方程

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$$

$$y'_x=\frac{b\cos t}{-a\sin t}=k$$

$$y-b\sin t_0=\frac{-b\cos t_0}{a\sin t_0}(x-a\cos t_0)$$

极坐标式函数的求导法则



(r,θ)

曲线的方程由极坐标形式给出：

$$r=r(\theta),\qquad \theta\in(\alpha,\beta)$$

由极坐标方程即可得到参数方程

$$\begin{cases}x=r(\theta)cos\theta\\ y=r(\theta)sin\theta\end{cases}$$

假设所有的函数都可导，那么我们有

$$x'(\theta)=r'(\theta)cos\theta-r(\theta)\sin\theta\neq 0$$

那么由参数式求导法克制，极坐标下点$(\theta,r(\theta))$处切线的斜率为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{r'(\theta)sin\theta+r(\theta)cos\theta}{r'(\theta)cos\theta-r(\theta)sin\theta}=\frac{tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

记切线与x轴正方向夹角为α，那么有

$$tan\alpha=\frac{tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

不定式

假设我们已知

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

其中，A、B、a的值都可能是无穷，那么有如下的极限运算

- (1) $\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$
- (2) $\lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$
- (3) $\lim_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big) = A/B$ (B≠ 0)
- (4) $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$

那么可能出现如下的极限情况，我们称这些情况为不定式：

$$\infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 1^{\infty}, 0^{0}, \infty^{0}$$

$^0/_0$型不定式

定理　　假设函数$f(x)$和$g(x)$在某一点a的空心邻域$U_0(a,\delta)$上可导且满足：

- $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$
- $g'(x) \neq 0, \forall x \in U_0(a,\delta)$
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l为有限数或$\pm\infty,\infty$)

则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

$\frac{0}{0}$: $\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$\frac{0}{0}$ $\frac{f(x)}{g(x)}$ $= l$

注：（1）把$x\to a$改成$x\to a-0$ 或$x\to a+0$，结论仍然成立。

（2）把a改成$\pm\infty,\infty$，结论仍然成立。

$x\to\infty$

$^0/_0$型不定式

- 求极限 $\lim\limits_{x\to 0+0}\frac{\sqrt{x}}{1-e^{2\sqrt{x}}}$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{0-e^{2\sqrt{x}}\,2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{-2e^{2\sqrt{x}}}=-\frac{1}{2}\quad\checkmark$$

$^0/_0$型不定式

- 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\frac{\pi}{2}-arctanx)$

$+\infty \cdot 0$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-arctanx}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{0-\frac{1}{1+x^2}}{-1x^{-2}}$$

$$\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-1}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{1+x^2} = 1$$

∞/∞ 型不定式

定理　　假设函数$f(x)$和$g(x)$在某一点a的空心邻域$U_0(a,\delta)$上可导且满足：

- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$
- $g'(x) \neq 0, \forall x \in U_0(a,\delta)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (l为有限数或$\pm\infty, \infty$)

$\frac{?}{\infty}$ 　 $\frac{\infty}{\infty} = \frac{f(x)}{g(x)} \to l$

则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = l$$

注：（1）把$x\to a$改成$x \to a-0$ 或$x\to a+0$，结论仍然成立。

（2）把a改成$\pm\infty,\infty$，结论仍然成立。

∞/∞ 型不定式

- 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^{\varepsilon}}$，其中$\varepsilon>0$

$\frac{+\infty}{+\infty}$

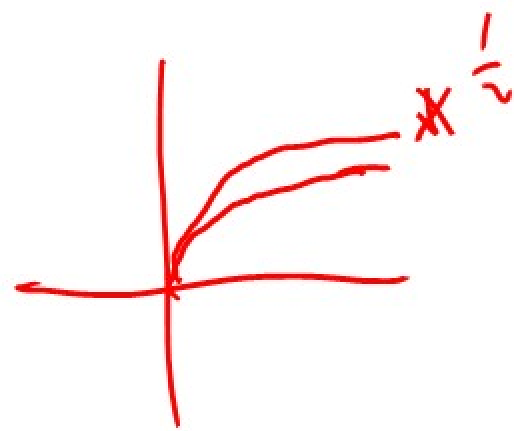
$\ln x < x^{\varepsilon}$

幂函数

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}}$$

$$= 0$$



$^{\infty}/_{\infty}$ 型不定式

- 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{x}}$ ，其中$\alpha > 0$

$\frac{+\infty}{+\infty}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{e^{x}}$

$= 0$

$\alpha < 1$

$\alpha - [\alpha] - 1$ $= 0 \to 0$

$< 0 \to 0$

例外情况

- 并不是所有的不定式都可以用洛必达法则，例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+sinx}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1} = \lim_{x\to\infty} 1+\cos x$$

- 使用洛必达法则的时候，每一步必须验证$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$是否存在，例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-sinx}{x+sinx}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{-\sin x} = -1$$

初等函数微商表

- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(sinx)' = cosx$; $(cosx)' = -sinx$

  $(tanx)' = sec^2x$; $(cotx)' = -csc^2x$
- $(arcsinx)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, |\mathrm{x}| < 1$

  $(arccosx)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, |\mathrm{x}| < 1$

  $(arctanx)' = \frac{1}{1+x^1}$

  $(arccotx)' = \frac{-1}{1+x^1}$
- $(a^x)' = lna \cdot a^x$ 特别地$(e^x)' = e^x$
- $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$

要点回顾

- 导数
  - 定义 $= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
  - 几何意义 → 切线的斜率
- 求导的基本方法
  - 四则运算
  - 链式法则

$x \to u \to y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

$$y'_x = y'_u u'_x$$

- 特殊的问题类型
  - 反函数，隐函数，参数式
- 不定式求导
- 初等函数微商表

我们在这里

- 问题答疑： http://www.xxwenda.com/
  - 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop