法律声明

- 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

微分

定义　　假设函数$y=f(x)$在$U(x_0,\delta_0)$内部有定义，如果存在常数A，使得

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)\quad(\Delta x\to 0)$$

则称$f(x)$在点x_0处可微，并且称$A\Delta x$为$f(x)$在x_0处的微分，记为

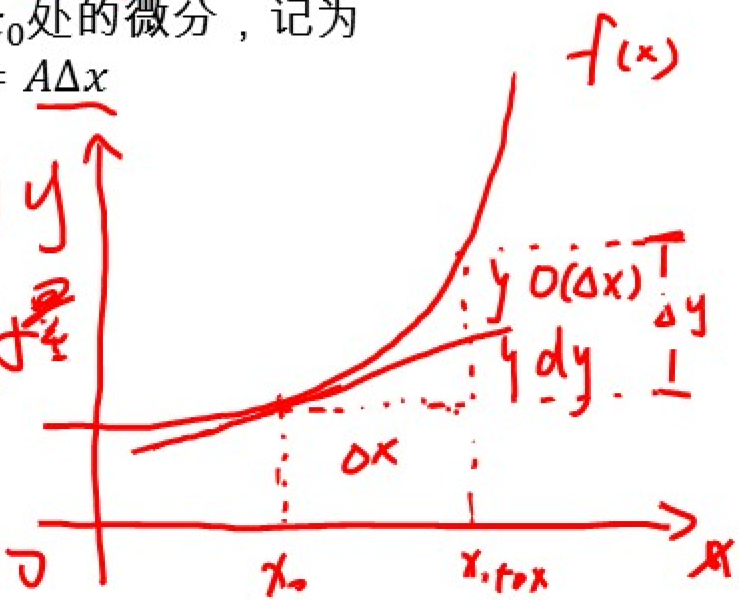
$$dy=A\Delta x \quad 或者 \quad df(x_0)=A\Delta x$$

$dx = \Delta x$

$dy = Adx$

$$\Delta y = \underbrace{\overset{dy}{A\Delta x}}_{线性} + \underbrace{o(\Delta x)}_{高阶无穷小量}$$

线性主部



注：

（1）dy是自变量增量Δx的线性函数→好计算

（2）dy与函数增量Δy之差是较Δx更高阶的无穷小量，因此我们可以用dy来近似表达Δy，所产生的相对误差是一个无穷小量，并且当$|\Delta x|$越小，近似程度越好，因此我们称$dy=A\Delta x$为Δy的线性主部。

微分与导数的关系

$\Longleftrightarrow$

定理　函数$f(x)$在点x_0处可微的充分必要条件是$f(x)$在x_0处可导

"$\Rightarrow$" $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \to 0)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1) = A$$

导数定义

$\therefore$ $f(x)$ 在x_0处可导，$f'(x_0) = A$

"$\Leftarrow$"

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = o(1)$$

$$\Delta y - \Delta x \cdot f'(x_0) = o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

微分的定义

$f'(x_0)\Delta x$.

用微分进行近似计算

$\Delta y \approx A \Delta x$

$f'(x_0)$ ± 0.1 ± 0.01 ± 1

- 求 $\sqrt[4]{80}$ 的近似值

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ 令 $x_0 = 81$ $\Delta x = -1$

$f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ $f(x_0) = 3$ $f'(x_0) = \dfrac{1}{108}$

$\Delta y = f'(x_0)\Delta x = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$= f(80) - f(81)$

$\dfrac{1}{108}(-1) = f(80)$

$f(81) - \dfrac{1}{108}$

$f(80) = 3 - \dfrac{1}{108} = 2.9907$

一阶微分的形式不变性

① 一阶 高阶 ×

② 一定是自变量 dx

设函数$y = f(u), u = g(x)$，根据复合函数的求导法则，可以得到复合函数$y = f(g(x))$的微分公式为

$$dy = \big(f(g(x))\big)' = f'(g(x))g'(x)dx$$

$f(x)dx$

u 是函数

$\Delta u \approx du$

由于$du = g'(x)dx$，带入上式就可以得到它的等价形式

$$dy = f'(u)du$$

这里$u = g(x)$是x的函数，但是我们发现，它与u为自变量的函数$f(u)$的微分形式

$$dy = f'(u)du$$

一模一样。也就是说，对$f(u)$进行微分时，不管u是因变量还是自变量，所得的结果具有形同的形式，这就是所谓的一阶微分的形式不变性。当然他们的意义不一样，当u是自变量时，$du = \Delta u$，而当u是函数时，一般来说，du与Δu是不同的。

$\Delta y \neq dy$

$\Delta y = dy$

$dy = f'(u)du$

基本初等函数微分公式

微分四则运算

- $d(f \pm g) = df \pm dg$
- $d(f \cdot g) = f \cdot dg + g \cdot df$
- $d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}$

$f' + g'$

$\frac{df + dg}{dx}$

$f(x) = \frac{dy}{dx}$

基本初等函数微分公式

- $d(C) = 0dx$
- $d(x^{\alpha}) = \alpha x^{\alpha-1}dx$
- $d(a^x) = a^x lnadx \ (a > 0)$
- $d(\ln|x|) = \frac{dx}{x}$
- $d(sinx) = cosxdx$
- $d(cosx) = -sinxdx$
- $d(tanx) = \frac{dx}{cos^2x}$
- $d(arcsianx) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$
- $d(arctanx) = \frac{dx}{1+x^2}$

高阶导数

一阶导数

$f(x)$

定义　如果函数 $y = f'(x)$的一阶导数仍然是可导函数，那么我们可以计算$(f'(x))'$，记其为$f''(x)$或者$\frac{d^2f}{dx^2}$，并称之为二阶导数。类似的，可以定义三阶导数$f'''(x) = (f''(x))'$。一般的，当$n \geq 4$时，定义$f(x)$的n阶导数为$f(x)$的$n-1$阶导数的导数，并且记为$f^{(n)}(x), y^{(n)}$, 或$\frac{d^n y}{dx^n}$。

$f^{(n)}(x)$　$f'(x)$

$d^n y$　n阶微分

$y^{(n)}$　y'

$dx^n = (dx)^n$

$\frac{d^n y}{dx^n}$　$\frac{dy}{dx}$

$(dx)^n$

高阶导数的几个例子

找它们规律.

- 设$\mathrm{y}=e^{ax}$,求$y^{(n)}$。

$$y' = e^{ax} \cdot a = a \cdot e^{ax}$$

$$y'' = a e^{ax} \cdot a = a^2 \cdot e^{ax}$$

$$y''' = a^3 \cdot e^{ax}$$

$$y^{(n)} = a^n \cdot e^{ax} \quad (n=1,2,3\cdots)$$

高阶导数的几个例子

- 设$\mathrm{y} = x^{\alpha}$，求$y^{(n)}$。

$p(x)=x^n$

n 整数

$m>n$. $p^{(m)}(x)=0$

$y' = \alpha x^{(\alpha-1)}$

$y'' = \alpha(\alpha-1) x^{(\alpha-2)}$

$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1) x^{\alpha-n}$ $(n\geq 1)$

α 整数 $\alpha=n$ $y^{(n)}=n!$

$y^{(n+1)}=0$

$y^{(m)}=0$

$m>\alpha/n$

高阶导数的几个例子

- 设$\mathrm{y} = \ln(1+x)$, 求$y^{(n)}$。

$$y' = \frac{1}{1+x} \qquad y'' = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$y''' = \frac{2!}{(1+x)^3} \qquad y^{(4)} = \frac{-3!}{(1+x)^4}$$

数学归纳法

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (n \geq 1).$$

高阶导数的几个例子

- 设$\mathrm{y} = sinx$, 求$y^{(n)}$。

$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$y'' = -\sin x = \sin(x + \pi)$

$\underline{y^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})}$

$\underline{\cos x = (\sin x)'}$

$\underline{(\cos x)^{(n)} = \cos(x + \frac{n\pi}{2})}$

n.

高阶导数的几个例子

- 设$\mathrm{y} = arctanx$,求$y^{(n)}$。

$$y' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \cos^2 y$$

$$y'' = -2\cos y\sin y \cdot y' = \underline{\cos^2 y \sin 2(y+\frac{\pi}{2})}$$

$$y''' = 2\cos^3 y \sin 3(y+\frac{\pi}{2})$$

$$\underline{y^{(n)} = (n-1)!\cos^n y \sin[n(y+\frac{\pi}{2})]}$$

莱布尼兹公式

- 对于两个函数f,g的和差的高阶导数，我们有

$$(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)}$$

- 对于常数c和函数f的积，有

$$(c\cdot f)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$$

- **莱布尼兹公式**　若函数f和g有任意阶导数，则

$$(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}g^{(k)}$$

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{(n-k)}b^{(k)}$$

$0\sim(n-1)$

高阶导数的几个例子

- 设$y = arcsinx$, 求$y^{(n)}(0)$。

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \sqrt{1-x^2}\cdot y' = 1 \Rightarrow (1-x^2)\cdot(y')^2 = 1$

$(1-x^2)2y'y'' + 2x\cdot(y')^2 = 0$

求(n-2)阶导

$(1-x^2)y^{(n)} + (n-2)(-2x)y^{(n-1)} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}\cdot(-2)y^{(n-2)} - xy^{(n-1)} - (n-2)y^{(n-2)} = 0$

代 $x=0$. $y^{(n)}(0) - (n-2)(n-3)y^{(n-2)}(0) - (n-2)y^{(n-2)}(0) = 0$

$y^{(n)}(0) = (n-2)^2 y^{(n-2)}(0)$.

$y^{(0)}(0) = 0$ 偶数 $=0$

$y^{(1)}(0) = 1$

$1\times3\times5\times\cdots(2n+1)!!$

$y^{(2n+1)}(0) = (2n-1)^2 y^{(2n-1)}(0)$

$= (2n-1)^2(2n-3)^2\cdots3^2\cdot1$

$= [(2n-1)!!]^2$

n为偶 $=0$

n为奇 $[(n-2)!!]^2$

高阶微分

$\frac{df}{dx}$

dx x

假设$f(x)$在区间(a,b)可微，那么有$df = f'(x)dx$，其中$f'(x)$是x的函数，而dx是与x无关的量，这样可以把df看成x的函数，再求一次微分$d(df)$，称之为$f(x)$的二阶微分，记为d^2f,即

$\frac{d^n f}{dx^n}$

$$d^2f = d(df) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$$

一般的，我们把n阶微分定义为

$$d^nf = d(d^{n-1}f) = \left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)'dx = f^{(n)}(x)dx^n$$

$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$

$dx^n = (dx)^n$

$= (\Delta x)^n$

0.1

要点回顾

$= f'(x)$

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ 可微

一阶：
一元函数

- 微分

  定义

  一阶微分的形式不变性

  高阶微分

可微 <=> 可导

- 高阶导数

  定义

  莱布尼兹公式

  基本初等函数的高阶导数

$(f\cdot g)^{(n)}$ 二项式定理

$e^{\alpha x}$ x^{α} $\ln(1+x)$

$\sin x$ $\cos x$

我们在这里

- 问题答疑：http://www.xxwenda.com/
  - 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop