

法律声明

□ 本课件包括：演示文稿，示例，代码，题库，视频和声音等，小象学院拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意，我们将保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

□ 课程详情请咨询

■ 微信公众号：小象

■ 新浪微博：ChinaHadoop



定积分



定义 设 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上，对于区间 $[a, b]$ 插入分点 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ ，使它们满足

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$[x_{i-1}, x_i]$

我们称之为对区间 $[a, b]$ 的一个分割，并记为 T ，又记

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\lambda(T) = \max\{\Delta x_i | i = 1, 2, \dots, n\}$$

网积直径

若对于任意分割以及任意选取的中间值 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，下列极限

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

$\int_a^b f(x) dx$

都存在，则称 f 在区间 $[a, b]$ 上可积，这个极限值为 f 在 $[a, b]$ 的定积分，记为

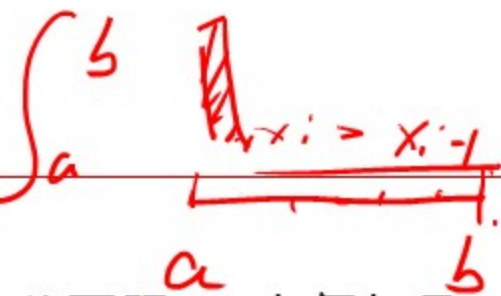
$$\int_a^b f(x) dx$$

$\lambda(T)$

称 f 为被积函数， b 与 a 分别称为积分上限与下限， x 称为积分变量， $[a, b]$ 称为积分区间。积分定义式中的 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 称为黎曼和。

黎曼和

定积分



- 在上述定义中，要求积分上限b大于积分下限a，方便起见，我们约定

$$\int_a^b f(x)dx = 0, \text{ 当 } b = a$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \text{ 当 } b < a$$

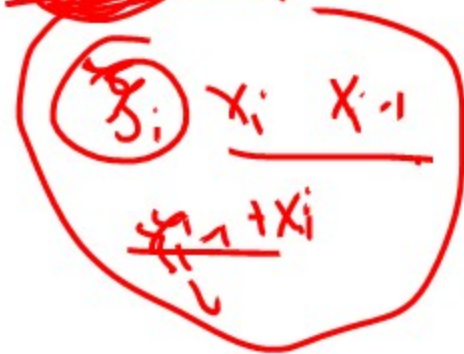
4-f.

- 我们说极限 $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 存在并且等于I是指：对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对于任意的分割T, 以及任意的 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ 都有

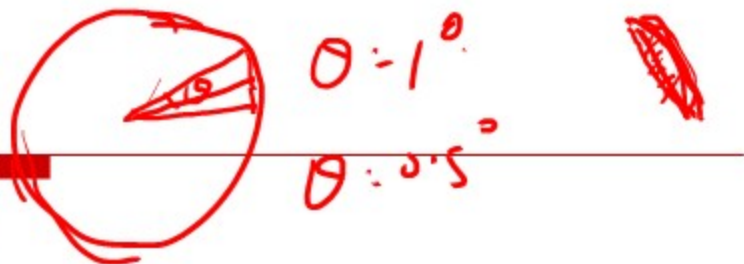
$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

只要 $\lambda(T) < \delta$

OK, 证毕



定积分的几何意义



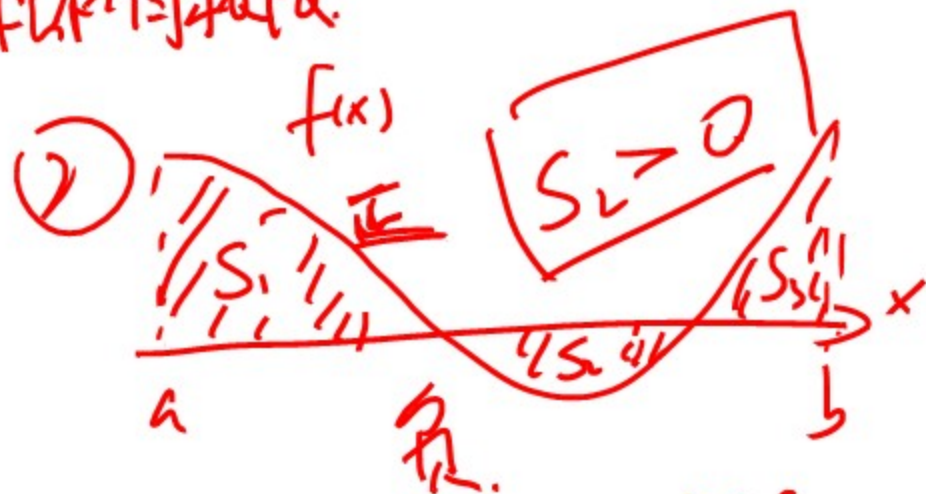
① $\sum_{i=1}^n \Delta x_i f(\xi_i)$

$\lambda(T) \rightarrow 0$



面积是有极限的

定积分的几何意义



$\int_a^b f(x) dx = S_1 - S_2 + S_3$

可积性

- 不是所有的函数都是黎曼可积的，例如狄利克雷函数 $D(x)$ 在任何区间都不可积。
 $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$
- 闭区间上的连续函数和单调函数是该闭区间上的黎曼可积函数
- 可积函数一定有界。

①. 本 $[x_{i-1}, x_i]$

$f(\xi_i) = 1 / 0$

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = 1 / 0$



定积分的性质

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积：

- 如果 $f(x) \geq g(x)$ ，则

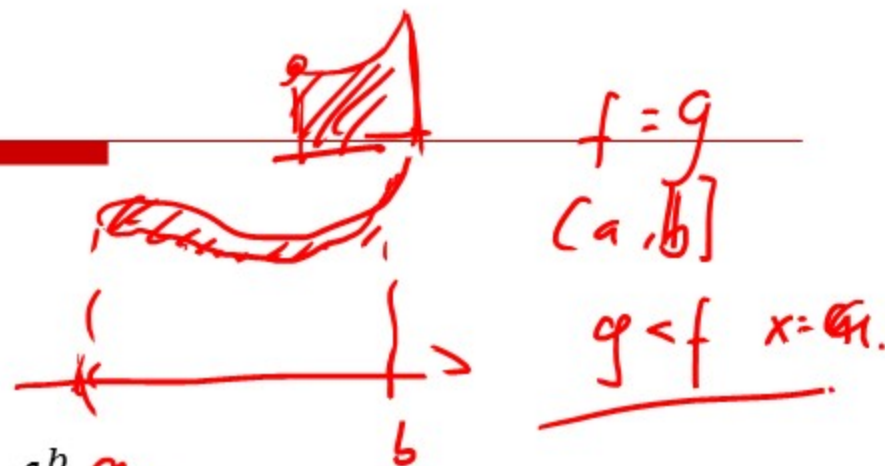
$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$$

特别的，如果 $g(x) \equiv 0$ ，那么 $f(x) \geq 0$ 有

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

- 对于任意的常数 C 而言，函数 $y = Cf(x)$ 也可积，并且

$$\int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^b f(x) dx$$



定积分的性质

假设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积:

- 则 $f(x) \pm g(x)$ 也可积, 并且

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

4. 则对于任意 $c \in [a, b]$ 有, 函数 $f(x)$ 在 $[a, c]$ $[c, b]$ 上都可积并且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

面积是相加



定积分的性质

假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积：

- 若 $g(x)$ 仅仅在有限个点处与 $f(x)$ 的取值不同，那么则 $g(x)$ 也可积，并且

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$$

- 则 $|f(x)|$ 在 $[a, b]$ 上也可积，且

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

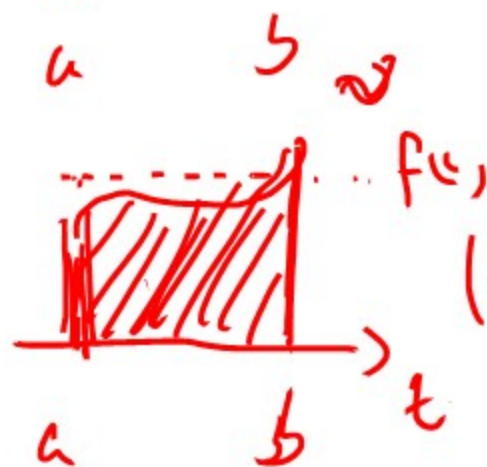


定积分中值定理

积分中值定理 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则在 $[a, b]$ 内至少存在一点 c 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

平均值定理



$$m \leq f(x) \leq M$$

$$(a \rightarrow b, f(c)) \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$
$$\frac{m(b-a)}{b-a} \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M$$

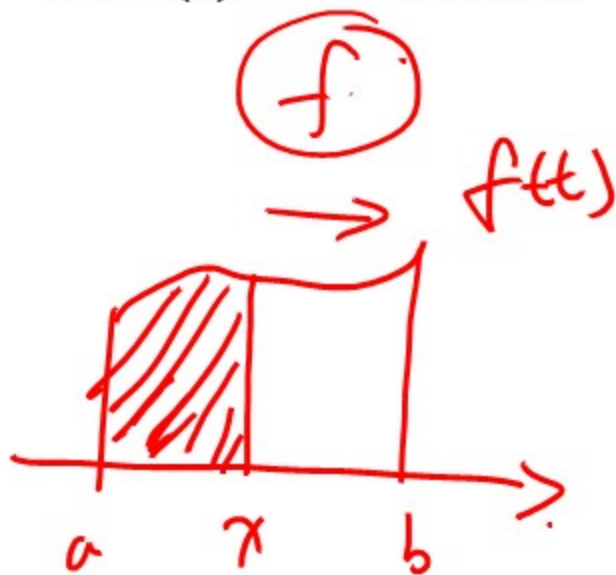
x_0 x_1 $f(c)$

变上限定积分

定义 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则对于任意一点 $x \in [a, b]$ 函数 $f(x)$ 在区间 $[a, x]$ 上可积，上限为 x 的定积分

$$K(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (x \in [a, b])$$

称为 $f(x)$ 的变上限积分。显然，变上限积分是关于 x 的一个函数。



变上限定积分

$$F(a) = 0$$

定义 假设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则其变上限积分

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$$

$f(x)$ $f(x)$

是 $[a, b]$ 上的连续函数，并且在 (a, b) 可导并有

$$F'_0(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

即，连续函数的变上限积分就是该连续函数的一个原函数。

$x_0 \in (a, b)$

$$F_0(x) - F_0(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt$$

$$= \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_0(x) - F_0(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F'_0(x) - F'_0(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

变上限定积分

• 设

$$2e^{2x+1} \sin 5x$$

求 $F'(x) = ?$

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$F(x) = \int_0^{2x+1} e^t \sin 5t dt$$

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{2(x+\Delta x)+1} e^t \sin 5t dt - \int_0^{2x+1} e^t \sin 5t dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_{2x+1}^{2(x+\Delta x)+1} f(t) dt$$

$$= 2 \cdot f(2x+1) = 2 \cdot e^{\sin 5(2x+1)}$$

$$F(x) = G(y) = \int_0^y e^t \sin 5t dt$$

$$\frac{dF}{dx} = G'(y) \cdot y'(x)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{2(x+\Delta x)+1} e^t \sin 5t dt = \frac{d}{dx} \int_0^{2x+1} e^t \sin 5t dt$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

微积分基本定理

微积分基本定理 设函数 f 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，又设 F 是 f 在区间 (a, b) 上的一个原函数，即

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in (a, b)$$

且在 $[a, b]$ 上连续，这时我们有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

这个公式又称**牛顿-莱布尼兹公式**

定积分的计算（1）

- 求定积分

$$\int_0^1 e^x + x dx$$

定积分的计算（1）

- 求定积分

$$\int_0^{2\pi} \sin x \, dx$$

定积分的计算（1）

- 求曲线 $y = x^2$ 和 $y = \sqrt{x}$ 围成的面积

定积分的计算（1）

- 设平面上有一个半径为 R 的圆盘，在其边缘上固定一点 A ，设开始时 A 与坐标原点重合，且圆盘与 x 轴相切于该点，当圆盘沿 x 轴滚动时， A 的轨迹称为旋轮线，求旋轮线第一拱（自开始至 A 再遇 x 轴）下的面积。

定积分的分部积分公式

定理 设函数 $u(x), v(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上可导且其导函数在 $[a, b]$ 上连续，则我们有

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

也可以写成下述形式

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x)$$



定积分的计算（2）

- 求定积分

$$\int_1^2 x \ln x \, dx$$

定积分的计算（2）

- 求定积分

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n \geq 2)$$

定积分的换元法

定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[A,B]$ 上连续，设 $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导函数，且当 t 在 $[\alpha,\beta]$ 上变动时， $\varphi(t)$ 在 $[A,B]$ 上变动。假定

$$\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b, \quad a, b \in [A, B]$$

则

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

定积分的计算 (3)

- 求定积分

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx$$

定积分的计算 (3)

- 求定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + e^x} dx$$

奇偶函数的定积分

设 f 为 $[-a, a]$ 上的偶函数，而 g 为 $[-a, a]$ 上的奇函数，它们都可积，那么

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \quad \int_{-a}^a g(x)dx = 0$$

周期函数的定积分

设 f 为实轴上的连续函数并且以 T 为周期，则对任意的实数 a 成立：

$$\int_0^T f(x)dx = \int_a^{a+T} f(x)dx$$

定积分的计算（4）

- 求定积分

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

定积分的计算 (4)

- 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx, \quad \int_0^2 \frac{x^2}{x^2 - 2x + 2} dx$$

定积分的应用

曲线求长 设平面上给定一条曲线 l ，它的参数方程是

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

假设函数 $x(t), y(t)$ 有连续的导函数，这是我们成这种曲线切线连续变动的曲线为**光滑曲线**，这种光滑曲线是可以计算弧长的（并不是所有的曲线都可以计算弧长）。曲线长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

定积分的应用

曲线求长 如果光滑曲线的公式由 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) 给出，那么曲线长度为：

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

定积分的应用

曲线求长 如果光滑曲线的公式由极坐标公式 $r = r(\theta)(\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 给出，那么曲线长度为：

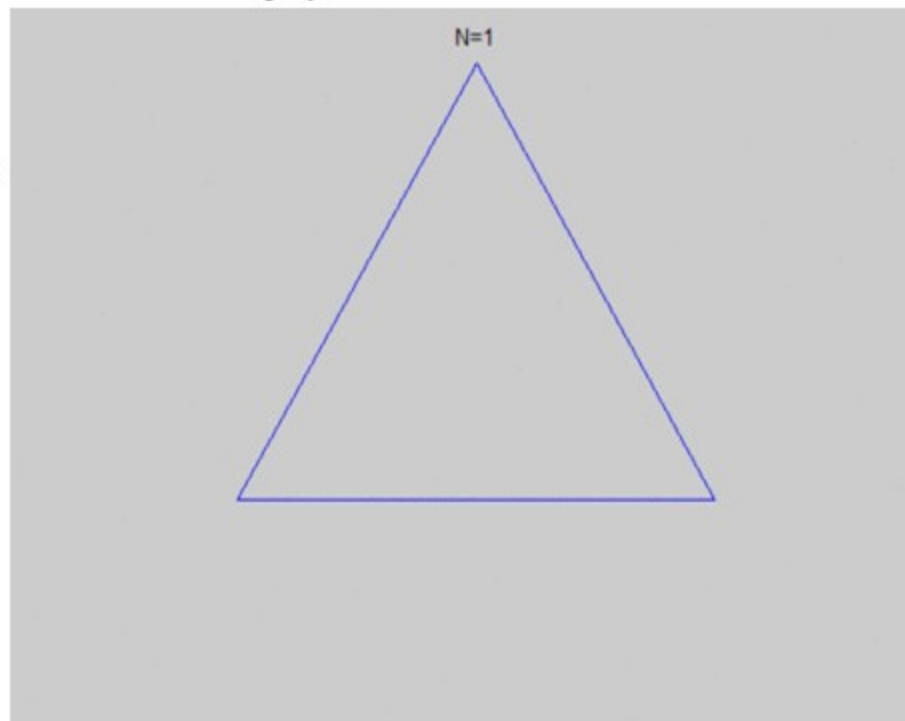
$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)} d\theta$$

Koch曲线

运用黎曼积分进行曲线求长的本质是用折线近似曲线，希望当折线单位取到无穷小的时候，折线长度能够有一个有限的极限。但是，并不是所有的曲线都能够在折线单位取无穷小的时候，折线长度能够收敛，很多满足自相似性（self-similarity）的图形在这个意义下长度为正无穷。

- 科克曲线的长度是无穷，但是围成的面积是有限的
- 证明过程就是n级图形周是n - 1级的4 / 3倍，是一级图形的 $(4 / 3)^n$ 倍，当n趋向于正无穷时，其周长趋向于正无穷。

Ref: [Introduction to Fractal Theory](#)



定积分的计算 (5)

- 求以 R 为圆盘半径的旋轮线第一拱的长度。

定积分的计算（5）

- 求椭圆周

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{其中 } a \geq b > 0)$$

的弧长。

定积分的应用

旋转体体积 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个非负连续函数，那么它与直线 $x = a, x = b$, 及 x 轴围成了一个曲边梯形，将该曲边梯形绕 x 轴旋转一周，得到一个旋转体。那么该旋转体的体积是

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

定积分的计算（6）

- 推导圆锥体体积公式。

定积分的计算 (6)

- 设区域D是椭圆周 $4(x - 4)^2 + 9y^2 = 9$ 所围成的。求绕x轴和y轴旋转一周所形成的旋转体的体积。

定积分的应用



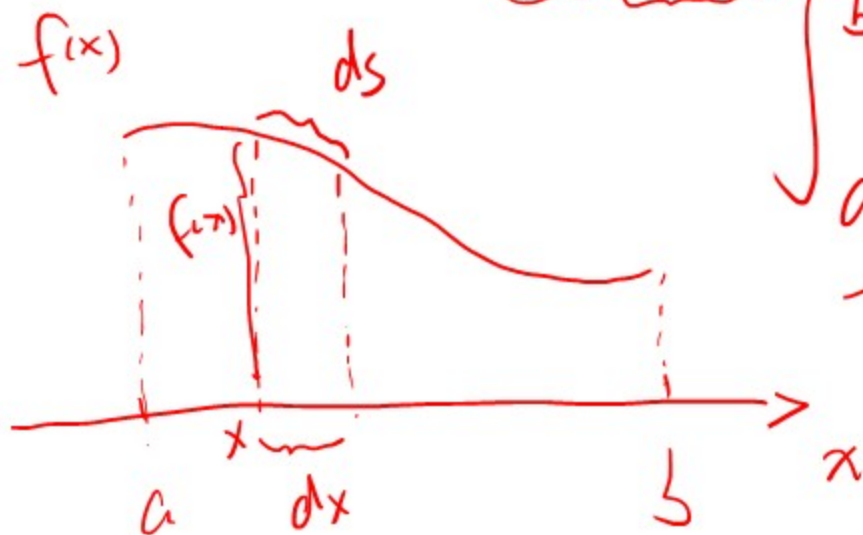
旋转体的侧面积

设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的一个非负连续函数，那么它与直线 $x = a, x = b$, 及 x 轴围成了一个曲边梯形，将该曲边梯形绕 x 轴旋转一周，得到一个旋转体。那么该旋转体的侧面积是

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

$ds = \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

$\int_a^b 2\pi f(x) ds$



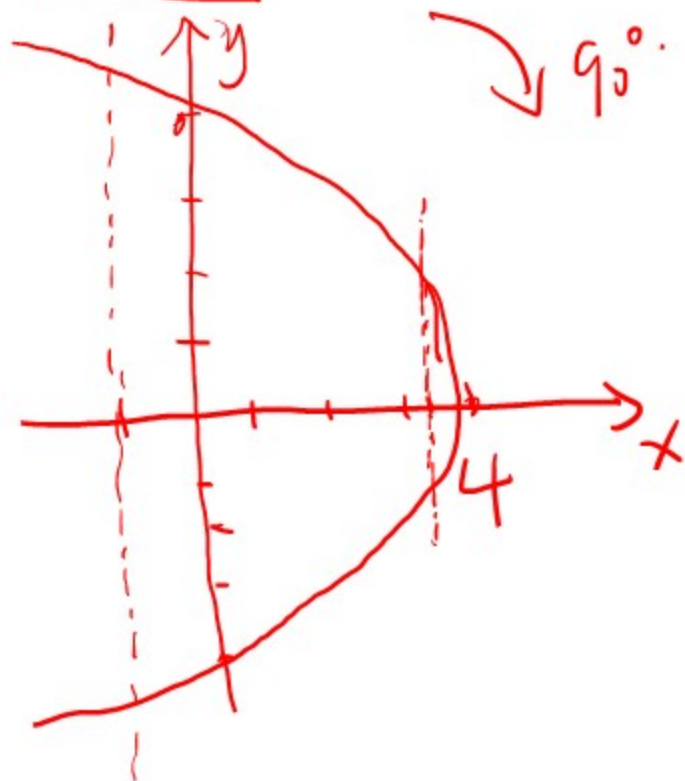
定积分的计算 (7)

- 求抛物线段

$$4-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$$

$$y^2 = 4(4-x) \quad (-1 \leq x \leq 7/2) \quad y > 0$$

绕x轴旋转一周时旋转体的侧面积。

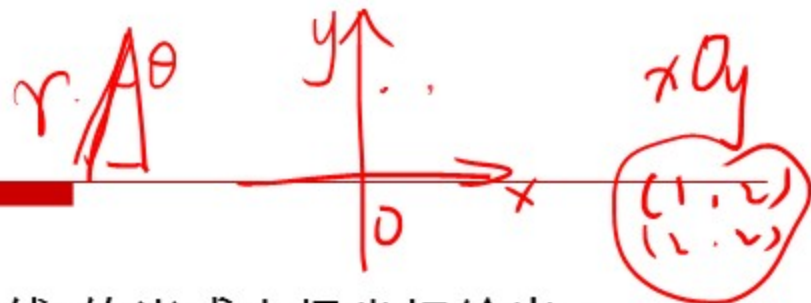


$$f(x) \quad y = \sqrt{4(4-x)}$$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{4-x}}$$

$$\begin{aligned} F &= 2\pi \int_{-1}^{\frac{7}{2}} y \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-1}^{\frac{7}{2}} \sqrt{4(4-x)} \sqrt{\frac{4-x}{4-x}} dx \\ &= 16\sqrt{5}\pi \end{aligned}$$

定积分的应用



平面极坐标下图形的面积

设曲线 l 的方程由极坐标给出：

$$r = r(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta, r(\theta) > 0)$$

(r, θ)

那么我们讨论曲线 l 与两个向径 $\theta = \alpha, \theta = \beta$ 之间所围成扇形的面积 S 。
有：



$L: r = r(\theta)$ $[\alpha, \beta]$

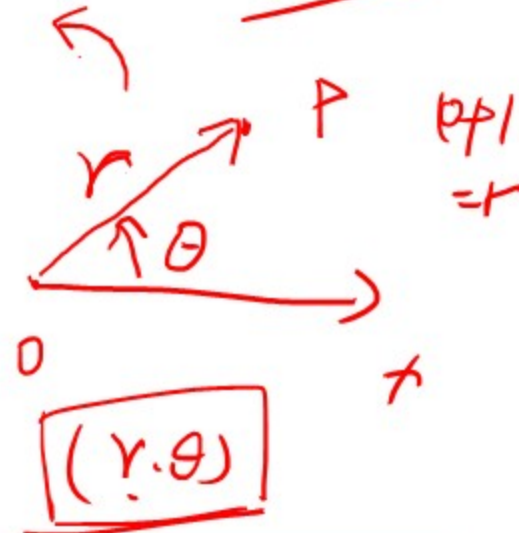
$$dS = \frac{1}{2} r^2(\theta) d\theta$$

面积元素

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta) d\theta$$

$$dS \approx \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

火焰。
其面积



定积分的计算 (8)

- 求三叶玫瑰线

的面积。

$$r(\theta) = a \sin 3\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$S = 6 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{3}} a^2 \sin^2 3\theta d\theta$$
$$= \frac{\pi}{4} a^2$$

Input interpretation:

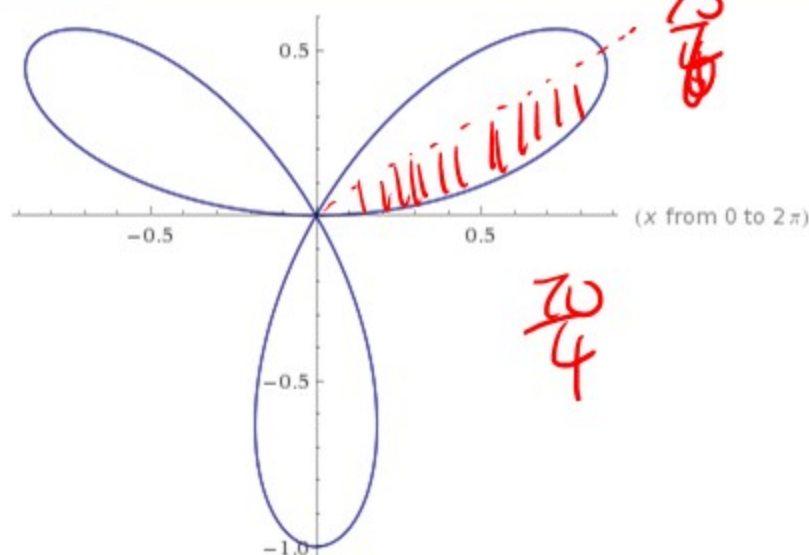
plot

$r = \sin(3x)$

$a=1$

Enlarge | Data | Customize | Plaintext | Interactive

Polar plot



定积分的计算 (8)

$$r = 1 - \sin \theta$$

- 求心脏线

$$r(\theta) = a(1 - \sin \theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

的面积。

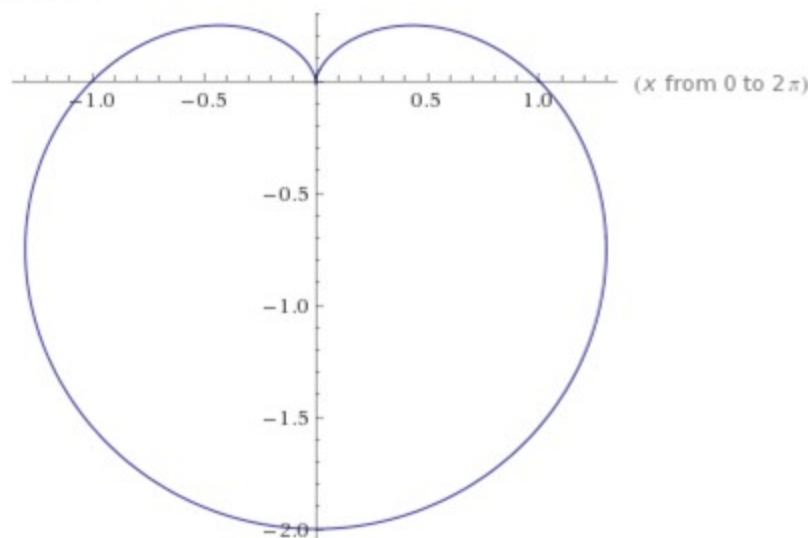
$$\begin{aligned} S &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} a^2 (1 - \sin \theta)^2 d\theta \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - 2\sin \theta + \sin^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 + \sin \theta d\theta \\ &= \frac{3}{2} \pi a^2 \end{aligned}$$

Input interpretation:

plot

$r = 1 - \sin(x)$

Polar plot



要点回顾

- 定积分

含义->用小矩形去近似曲线下面积

定积分的性质 (加减, 数乘, 区间分割, 不等式)



- 变上限积分

含义->连续函数的变上限积分是该函数的一个原函数

- 定积分计算方法

换元法

分部积分

微积分基本定理 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

定

不定

ds



- 定积分的应用

曲线求长, 曲线围成的平面图形的面积, 旋转体体积, 侧面积

我们在这里

□ 问题答疑：

<http://www.xxwenda.com/>

■ 可邀请老师或者其他人回答问题

联系我们

小象学院：互联网新技术在线教育领航者

- 微信公众号：小象
- 新浪微博：ChinaHadoop

